

Министерство образования и науки Украины
Донбасская государственная машиностроительная академия (ДГМА)

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА

Конспект лекций

**для студентов всех форм обучения
специальности 151
«Автоматизация и компьютерно-интегрированные
технологии»**

Образовательный уровень – бакалавр

Утверждено
на заседании
методического совета
Протокол № от

Краматорськ
ДГМА
2018

УДК 621.3.01(07)

Электротехника и электромеханика : конспект лекций (для студентов всех форм обучения специальности 151) / сост.: С. П. Сус. – Краматорск : ДГМА, 2018. – 88 с.

Содержит необходимый для усвоения теоретический материал, который соответствует учебной рабочей программе по дисциплине «Электротехника и электромеханика». Представлены конкретные примеры расчета электрических цепей различной сложности.

Составитель: С. П. Сус, доц.

Отв. за выпуск Г. П. Клименко, проф.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА	6
1.1 Основные определения и основные законы электротехники	6
1.1.1 Общие понятия об электрических цепях	6
1.1.2 Источники электрической энергии и их эквивалентные схемы.....	7
1.1.3 Основные законы электротехники (Ома, Кирхгофа).....	9
1.1.4 Расчет цепей при последовательном, параллельном и смешанном соединениях приемников	10
1.1.5 Потенциальная диаграмма и баланс мощностей.....	11
1.2 Расчет сложных электрических цепей постоянного тока.....	12
1.2.1 Условие передачи приемнику максимальной мощности	12
1.2.2 Расчет сложных цепей методом уравнений Кирхгофа.....	13
1.2.3 Метод контурных токов	15
1.2.4 Метод узловых потенциалов	15
1.3 Дополнительные методы для расчета цепей постоянного тока	17
1.3.1 Метод двух узлов.....	17
1.3.2 Метод компенсации.....	18
1.4 Многополюсники.....	19
1.4.1 Двухполюсник и метод эквивалентного генератора.....	19
1.4.2. Эквивалентные преобразования пассивных трехполюсников	20
1.4.3 Соединение треугольником и звездой.....	22
2 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА	25
2.1 Основные характеристики синусоидального напряжения и тока	25
2.1.1 Цепь с активным сопротивлением.....	27
2.1.2 Цепь с индуктивным сопротивлением	28
2.1.3 Цепь с емкостным сопротивлением.....	29
2.1.4 Последовательное соединение R, C, L элементов.....	30
2.1.5 Резонанс напряжения	34
2.2 Расчет электрической цепи при параллельном соединении	36
2.2.1 Параллельное соединение ветвей в цепи однофазного тока.....	36
2.2.2 Метод проводимостей	38
2.2.3 Резонанс токов	40
2.3 Смешанное соединение ветвей в цепи переменного тока.....	41
2.3.1 Расчет цепей при смешанном соединении элементов	41
2.3.2 Мощность синусоидального тока	44
2.3.3 Схемы замещения реальной катушки индуктивности.....	46
2.4 Символический метод расчета цепей синусоидального тока	47

2.4.1	Основные операции над комплексными числами.....	47
2.4.2	Представление синусоидальных величин	50
2.4.3	Комплекс сопротивления.....	51
2.5	Расчет сложных цепей однофазного синусоидального тока.....	53
2.5.1	Законы Киргофа в символической форме.....	53
2.5.2	Комплексная мощность в цепи синусоидального тока	55
2.6	Передача энергии синусоидального однофазного тока и магнитно-связанные цепи	55
2.6.1	Передача энергии переменного тока по двухпроводной линии. Потеря и падение напряжения линии	55
2.6.2	Индуктивно (магнитно) связанные катушки и их последовательное или параллельное соединение	57
2.6.3	Передача мощности при помощи трансформатора	60
3	ТРЕХФАЗНЫЙ ТОК.....	62
3.1	Получение трехфазного тока. Основные определения.....	62
3.2	Расчет трехфазных цепей.....	67
3.2.1	Соединение потребителей звездой	67
3.2.2	Соединение потребителей треугольником	68
3.2.3	Расчет несимметричных режимов работы трехфазных систем.....	69
3.2.4	Мощность в трехфазных цепях.....	72
3.3	Электрические цепи несинусоидального периодического тока	73
3.3.1	Возникновение несинусоидального периодического тока	73
3.3.2	Расчет цепей несинусоидального периодического тока	75
3.4	Трехфазные цепи несинусоидального тока	76
3.4.1	Особенности трехфазных цепей несинусоидального тока	76
4	ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ	79
4.1	Возникновение переходных процессов и методика их расчета классическим методом	79
4.2	Переходные процессы в R-L цепи при ее подключении к источнику напряжения.....	80
4.3	Переходные процессы при отключении катушки.....	84
4.4	Заряд и разряд конденсатора	85
	Список литературы.....	87

ВВЕДЕНИЕ

Электротехника – отрасль науки и техники, связанная с получением, преобразованием и использованием электрической энергии в практической деятельности человека, охватывающая вопросы применения электромагнитных явлений в различных отраслях промышленности и в быту.

Цель дисциплины – усвоение методов анализа и расчетов электрических цепей различной сложности, электрических аппаратов и машин, а также электронных устройств.

Студент должен знать:

- физические процессы в электрических и магнитных цепях;
- методы расчетов постоянных и переходных процессов в электрических и магнитных цепях;
- конструкции, принцип действия, способы управления и защиты основных электрических аппаратов и машин.

Студент должен уметь:

- выполнять расчеты электрических и магнитных цепей;
- собирать электрические цепи по их принципиальным схемам;
- анализировать режимы работы схем в постоянных и динамических режимах;
- выполнять расчеты цепей несинусоидального тока.

Предложенный в данной работе материал является сокращённым конспектом лекций. Для глубокого изучения материала необходимо непременно поддержать теоретические знания решением практических задач и выполнением лабораторных работ.

Лабораторные работы выполняются с применением специальных лабораторных стендов и с использованием программы моделирования аналоговых и цифровых схем «Electronics Workbench». Более подробное изложение теоретического материала может быть найдено в литературе, использованной при написании этой работы.

Приобретенные знания и умения будут использованы студентами при разработке и наладке информационных и автоматизированных систем управления.

1 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1 Основные определения и основные законы электротехники

1.1.1 Общие понятия об электрических цепях

Электрическая цепь это совокупность взаимосвязанных элементов, компонентов или устройств, предназначенных для прохождения в них электрического тока. Процессы в цепи могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе (E), электрическом токе (I) и электрическом напряжении (U).

Электрическая цепь состоит из отдельных частей (объектов), выполняющих определенные функции и называемых элементами цепи. Используется принцип электрической схемы, на которой в виде условных графических обозначений показывают все элементы и все соединения (рис 1.1).

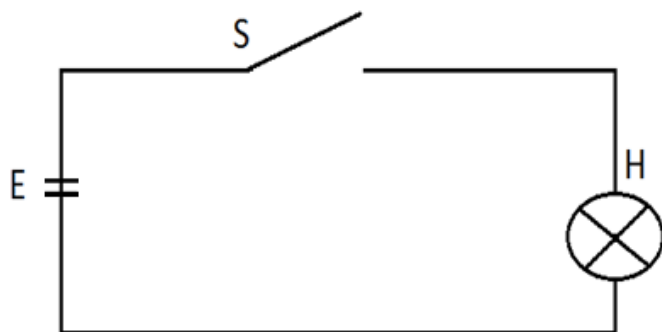


Рисунок 1.1– Электрическая схема

В электротехнике для расчета электрических цепей используются эквивалентные схемы (схемы замещения) (рис.1.2).

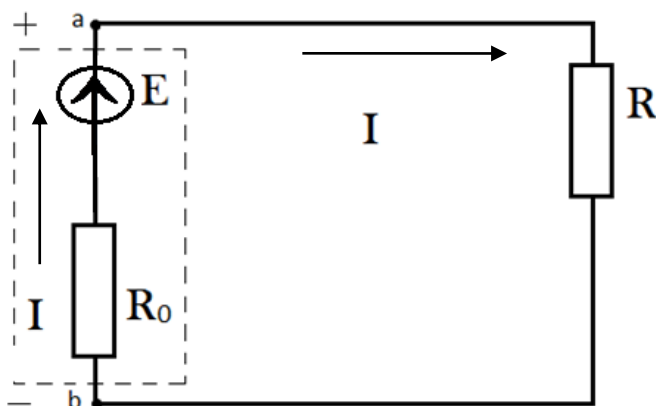


Рисунок 1.2 – Схема замещения

Напряжение направлено от большего потенциала к меньшему.

Участок цепи, в котором элементы расположены последовательно, называется ветвью (В). Точка соединения трех и более ветвей называется узлом (У). Начало и конец ветви обычно подсоединены к узлам. Замкнутая часть схемы называется контуром. Положительное направление тока совпадает с ЭДС.

1.1.2 Источники электрической энергии и их эквивалентные схемы

В цепи постоянного тока применяются источники напряжения и источники тока.

Источники напряжения имеют малое внутреннее сопротивление (рис. 1.3).

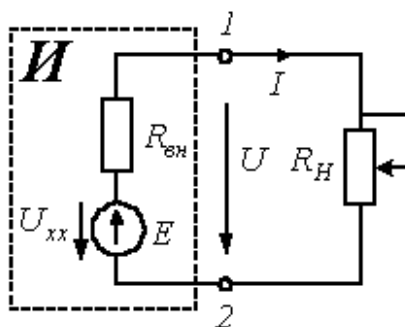


Рисунок 1.3 – Источник напряжения

$U_{ab} = E - r_0 \cdot I$ – внешняя характеристика источника.

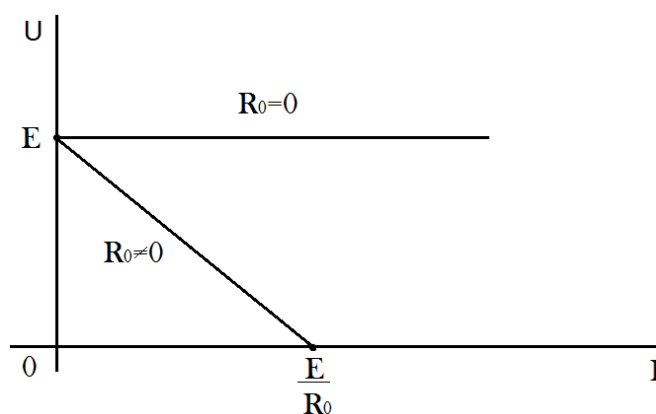


Рисунок 1.4 – Внешняя характеристика источника напряжения

$I = 0$ – режим холостого хода, $U = 0$ – режим короткого замыкания. Кроме источника напряжения используется источник тока (рис 1.5).

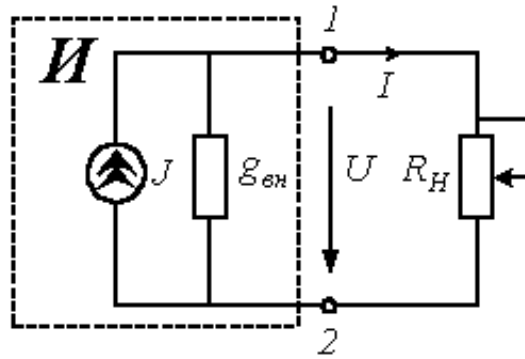


Рисунок 1.5 – Источник тока

Внешняя характеристика источника тока представлена на рис. 1.6.

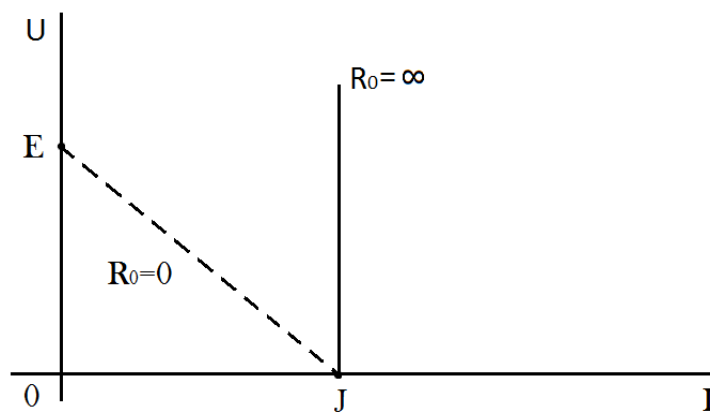


Рисунок 1.6 – Внешняя характеристика источника тока

Рассмотрим электрическую цепь с несколькими источниками напряжения (рис 1.7):

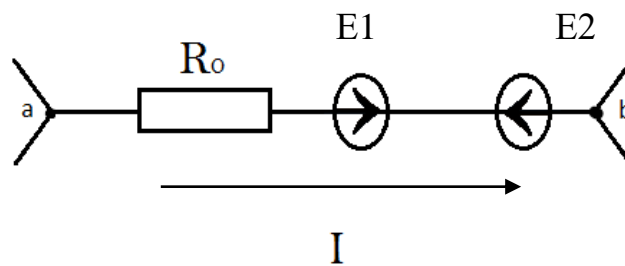


Рисунок 1.7 – Схема с несколькими источниками напряжения

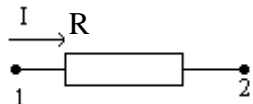
а и b – узлы.

$$U_{ab} = r \cdot I + E_1 - E_2 .$$

$$I = \frac{U_{ab} + \Sigma E}{r} .$$

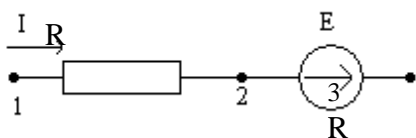
1.1.3 Основные законы электротехники (Ома, Кирхгофа)

Закон Ома для участка цепи при отсутствии ЭДС. Под напряжением на зажимах цепи понимают разность потенциалов между крайними точками ветви. Ток течет от большего потенциала к меньшему.



$$\varphi_1 > \varphi_2; \quad U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2; \quad I = U_{12}/R = (\varphi_1 - \varphi_2)/R.$$

Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. При наличии источника получим аналогичное выражение.

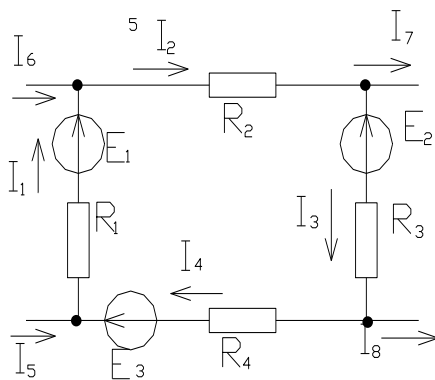


$$I = U_{12}/R = (\varphi_1 - \varphi_2)/R; \quad \varphi_2 = \varphi_3 - E; \quad \varphi_1 - \varphi_3 = U + E. \text{ Из этого следует: } I = (\varphi_1 - \varphi_3 - E)/R = (U_{13} - E)/R.$$

Первый закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю ($\sum I_k = 0$, $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0$), или сумма токов, направленных к узлу, равна сумме токов, направленных от него, то есть $I_1 + I_2 + I_5 = I_3 + I_4$.

Правило: если ток направлен в узел, то перед ним в уравнении ставится «+», если ток направлен от узла, то «-».

Второй закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС внутри этого контура.



$$\sum E_k = \sum I_i \cdot R_i; \quad E_1 - E_2 + E_3 = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4.$$

Правило: если направление тока и E совпадает с направлением обхода то в уравнении берётся со знаком «+», если не совпадает, то «-».

1.1.4 Расчет цепей при последовательном, параллельном и смешанном соединениях приемников

Рассмотрим электрическую цепь со смешанным соединением приемников (рис 1.8):

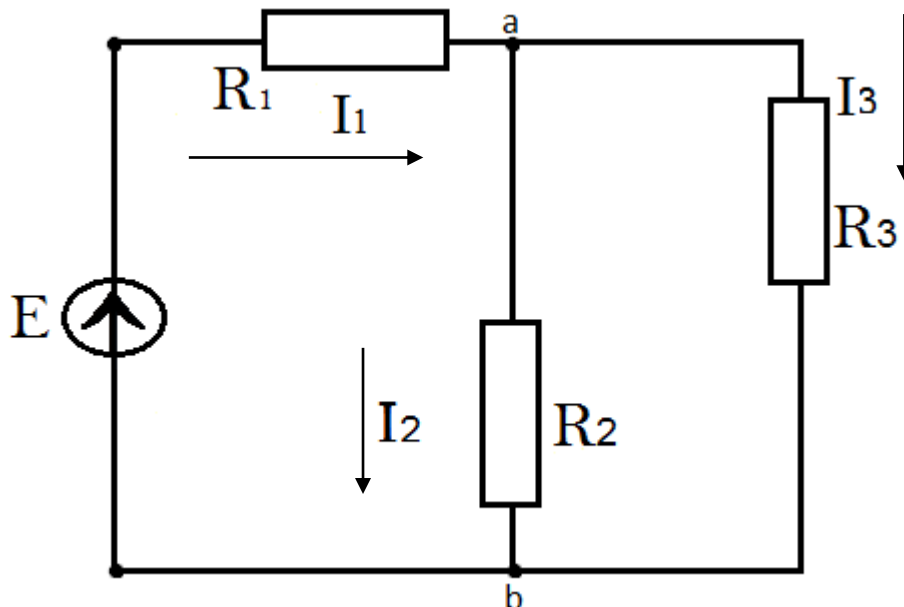


Рисунок 1.8 –Цепь со смешанным соединением

Рассчитать такую цепь возможно, применяя законы Ома и Кирхгофа:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$g = \frac{1}{r}$$

$$g_{\text{общ}} = \frac{1}{r_{\text{общ}}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots$$

$$U_{ab} = I_1 \cdot \frac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_3}$$

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{r_2}$$

$$I_1 = \frac{E}{r_1 + \frac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_3}}$$

$$E = I_1 \cdot r + U_{ab}$$

1.1.5 Потенциальная диаграмма и баланс мощностей

Потенциальная диаграмма графически представляет распределение потенциалов вдоль контура. Для приведенной на рисунке 1.9 электрической цепи построена потенциальная диаграмма (рис 1.10).

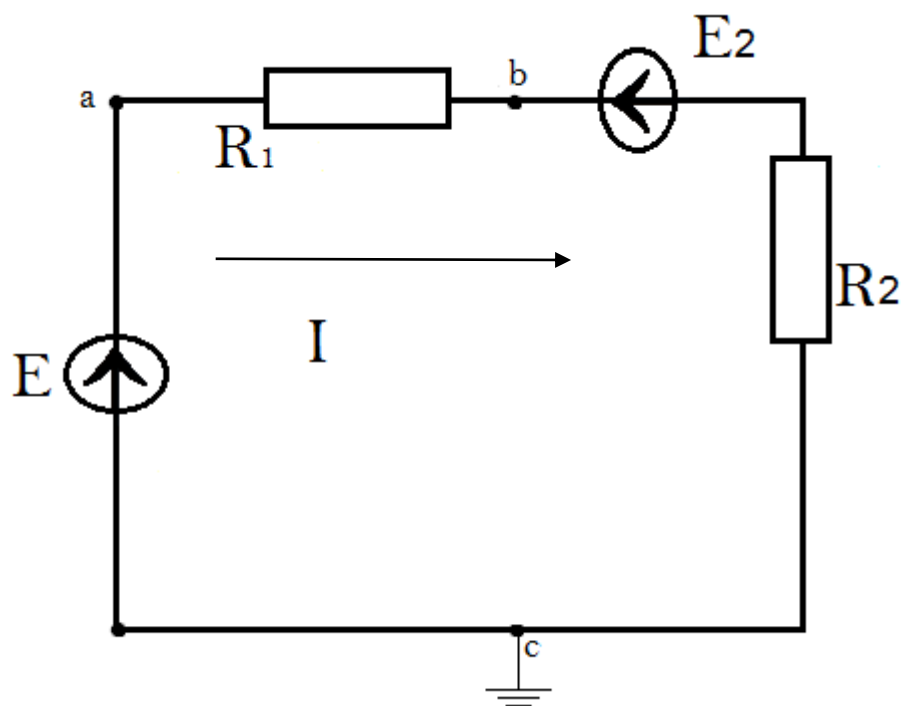


Рисунок 1.9 – Электрическая цепь

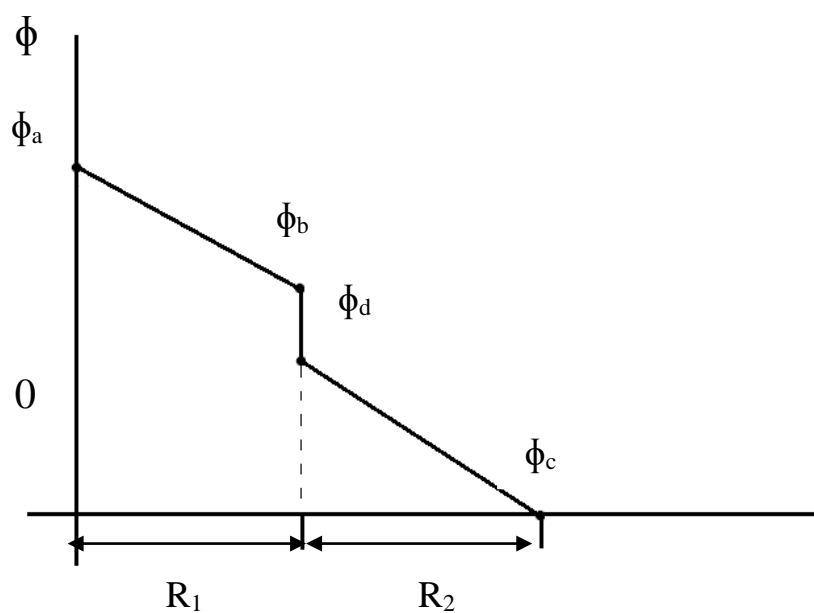


Рис. 1.10 – Потенциальная диаграмма

Запишем потенциал в каждой точке: $\varphi_a = \varphi_d + E_1 = E_1$.

$$\varphi_b = \varphi_a - r_1 \cdot I.$$

$$\varphi_c = \varphi_b - E_2.$$

$$\varphi_d = \varphi_c - r_2 \cdot I = 0.$$

В любой электрической цепи должен быть баланс мощностей, то есть мощность отдаваемым источником расходуется в приемниках.

$$P_{\text{источника}} = E \cdot I.$$

Условие баланса мощностей:

$$\sum E_i \times I_i = \sum R_i \times I_i^2.$$

Баланс мощностей для схемы (рис 1.9):

$$E_1 \cdot I - E_2 \cdot I = r_1 \cdot I^2 + r_2 \cdot I^2.$$

1.2 Расчет сложных электрических цепей постоянного тока

1.2.1 Условие передачи приемнику максимальной мощности

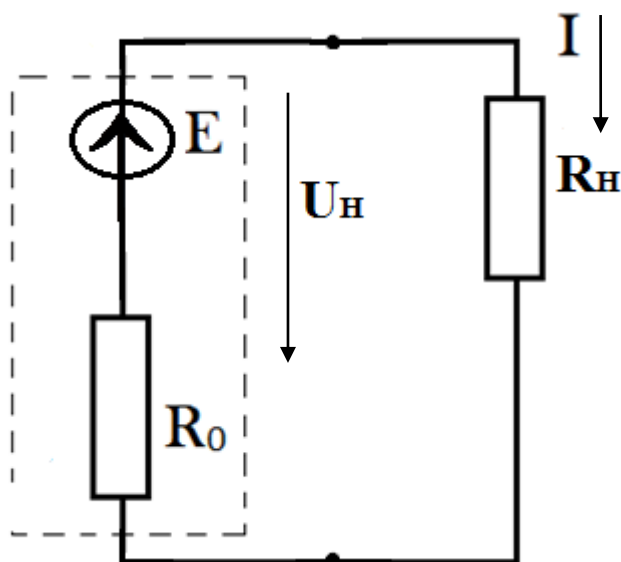


Рисунок 1.11 – Электрическая цепь

$$P_H = U_H \cdot I = I^2 \cdot r_h = \frac{U_H^2}{r_H} = \frac{(E - I \cdot r_0)^2}{r_H} = \frac{(E - \frac{E}{r_0 + r_H} \cdot r_0)^2}{r_H}.$$

$$\text{Рист} = E \cdot I \quad \eta = \frac{P_H}{P_{\text{ист}}} = \frac{r_H}{r_0 + r_H}.$$

1) Режим холостого хода: $I = 0$; $P_{H \text{ х.х.}} = 0$.

2) Режим короткого замыкания: $I_{\text{к.з.}} = \frac{E}{r_0}$; $U_H = 0$; $P_{H \text{ к.з.}} = 0$.

Условие максимальной мощности в нагрузке можно определить, взяв производную $\frac{dP_H}{dr_H} = 0$.

$r_H = r_0 \Rightarrow P_{\text{нагруз.}} - \text{максимум.}$

$\eta_{P.\text{max}} = 0,5 \text{ (50\%).}$

Построим графики зависимостей основных параметров от нагрузки (рис 1.12):

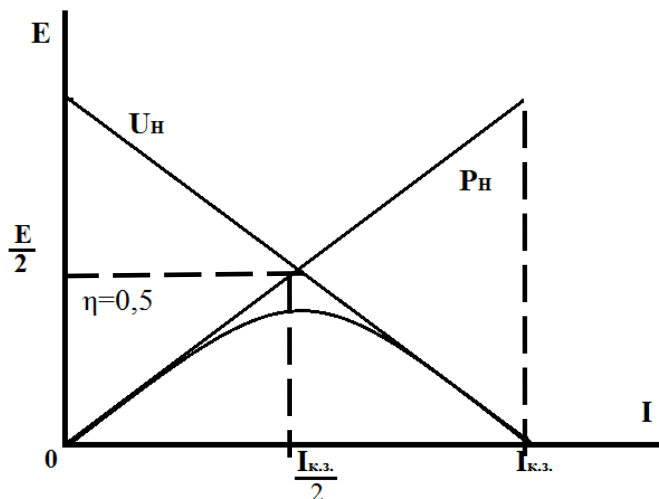


Рисунок 1.12 – График зависимости основных параметров от нагрузки

КПД изменяется по прямой линии и в режиме согласования равен 0,5. В силовых установках принимается режим, где КПД больше чем 0,9.

1.2.2 Расчет сложных цепей методом уравнений Кирхгофа

Для расчета сложной электрической цепи (рис 1.13) методами Кирхгофа составляется уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов, и по второму – для контуров.

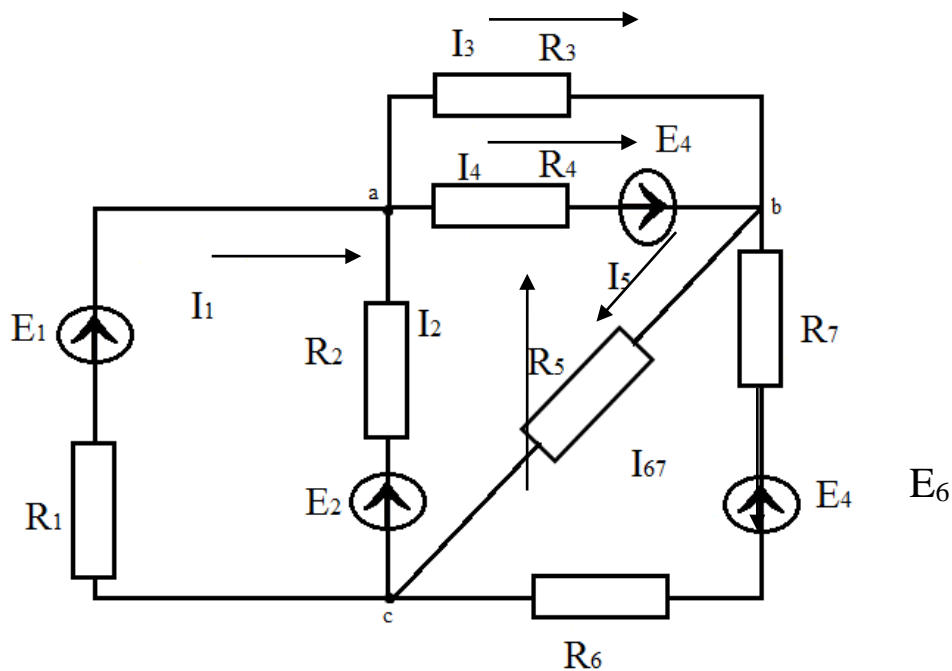


Рисунок 1.13 – Сложная электрическая цепь

Для определения токов каждой ветви на схеме указывают их положительные направления. По первому закону Кирхгофа для независимых узлов составляется $(Y - 1) \Rightarrow$ первый закон Кирхгофа.

Для нашего случая составляется два уравнения. По второму закону составим уравнения для независимых контуров. Количество всех уравнений равняется числу ветвей.

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0. \\ I_3 + I_4 - I_5 - I_6 = 0. \\ I_1 \cdot r_1 - I_2 \cdot r_2 = E_1 - E_2. \\ I_2 \cdot r_2 + I_4 \cdot r_4 + I_5 \cdot r_5 = E_2 + E_4. \\ I_6 \cdot (r_6 + r_7) - I_5 \cdot r_5 = -E_6. \\ I_3 \cdot r_3 - I_4 \cdot r_4 = -E_4. \end{array} \right.$$

Решая указанную систему, определим токи в ветвях. Если при расчете ток получается отрицательным, то нужно поменять его направление. Проверку выполняем составлением уравнения баланса мощностей.

$$E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_4 \cdot I_4 + E_6 \cdot I_6 = r_1 \cdot I_1^2 + r_2 \cdot I_2^2 + r_4 \cdot I_4^2 + r_6 \cdot I_6^2$$

Основными недостатками применения этого способа – это система с большими числами уравнений. Для упрощения расчетов применяются иные методы. Один из них – метод контурных токов.

1.2.3 Метод контурных токов

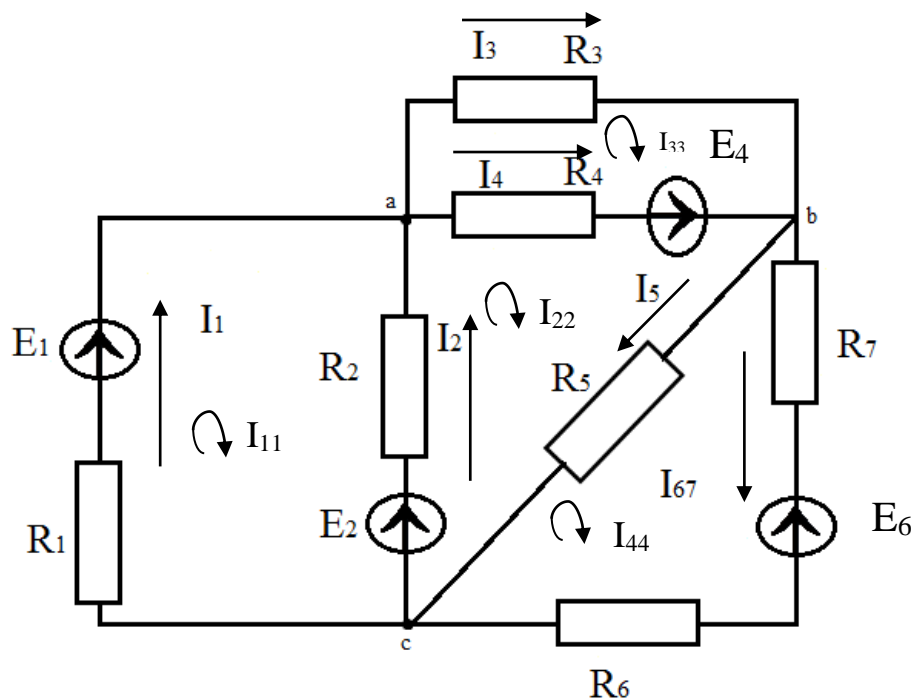


Рисунок 1.14 – Сложная электрическая цепь

При контурных токах схема разбивается на независимые контуры и в каждом контуре указывается контурный ток (рис 1.14). По второму закону Кирхгофа используется уравнение для всех контурных токов. Действительные токи находятся алгебраическим сложением контурных токов:

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2) \cdot I_{11} - r_2 \cdot I_{22} &= E_1 - E_2. \\ (r_2 + r_4 + r_5) \cdot I_{22} - r_2 \cdot I_{11} - r_4 \cdot I_{44} - r_5 \cdot I_{33} &= E_2 + E_4. \\ I_1 &= I_{11}; I_2 = I_{11} - I_{22}; \text{ и т.д.} \\ (r_5 + r_6 + r_7) \cdot I_{33} - r_5 \cdot I_{22} &= - E_6. \\ (r_3 + r_4) \cdot I_{44} - r_4 \cdot I_{22} &= E_4. \end{aligned}$$

1.2.4 Метод узловых потенциалов

Метод позволяет сократить число уравнений до $U - 1$.

Данный метод применяется в случае, если число узлов равно или меньше числу независимых контуров.

Для схемы (рис.1.15) покажем применение метода узловых потенциалов.

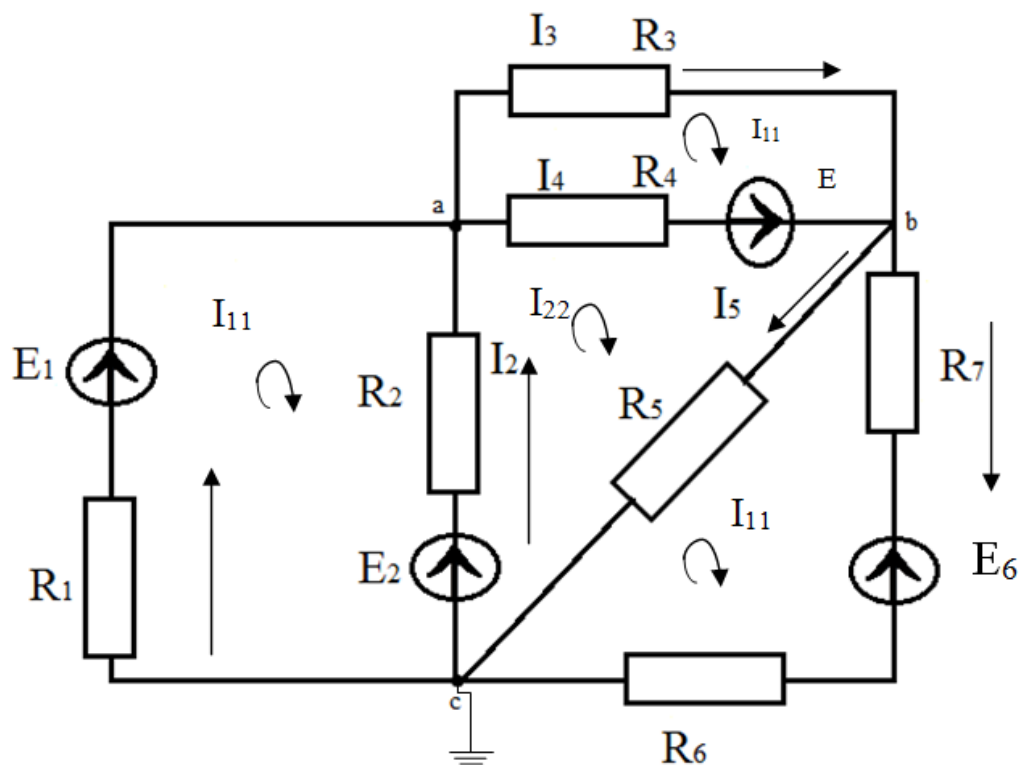


Рисунок 1.15 – Сложная электрическая цепь с заземлением узла

При данном методе определяющимся потенциалом каждого узла относительно нулевого потенциала, поэтому один из узлов необходимо заземлить (рис 1.15).

$$\varphi_c = 0.$$

Необходимо в ветвях показать положительное направление токов.

Для оставшихся узлов составляются уравнения по первому закону Кирхгофа, поле чего определяются токи через потенциалы, сопротивления(проводимости) ветвей.

Полученные уравнения составляют систему, из которой определяются потенциалы.

Для узла а:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

Для узла b:

$$I_3 + I_4 = I_5 + I_6$$

$$I_1 = (\varphi_c - \varphi_a + E_1) \cdot g_1 = (E_1 - \varphi_a) \cdot g_1$$

$$I_2 = (\varphi_c - \varphi_a + E_2) \cdot g_2 = (E_2 - \varphi_a) \cdot g_2$$

$$I_3 = (\varphi_a - \varphi_b) \cdot g_3$$

$$I_4 = (\varphi_a - \varphi_b + E_4) \cdot g_4$$

$$I_5 = (\varphi_b - \varphi_c) \cdot g_5 = \varphi_b \cdot g_5$$

$$I_6 = (\varphi_b - \varphi_c - E_6) \cdot g_6$$

$$(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) \cdot \varphi_a - (g_3 + g_4) \cdot \varphi_b = E_1 \cdot g_1 - E_2 \cdot g_2 - E_4 \cdot g_4$$

$$(g_3 + g_4) \cdot \varphi_a - (g_3 + g_4 + g_5 + g_6) \cdot \varphi_b = E_4 \cdot g_4 + E_6 \cdot g_6$$

Решая указанную систему, определяются потенциалы φ_a и φ_b . После чего определяются токи. Для составления последующего уравнения пользуются следующим методом.

Произведение суммы проводимости всех ветвей, которые соединяются в узле на потенциал данного узла, минус суммы проводимости ветвей, соединяющих, данный узел со следующим, умножить на потенциал следующего узла и т.д.

Равно произведению ЭДС каждой ветви, которая подключена к исходному узлу, умноженному на проводимости соответствующих ветвей. Если ЭДС подключена, к узлам, то «+», если от узла, то «-».

1.3 Дополнительные методы для расчета цепей постоянного тока

1.3.1 Метод двух узлов

Данный метод является частным случаем метода узловых потенциалов. Рассмотрим применение данного метода на примере цепи (рис.1.16).

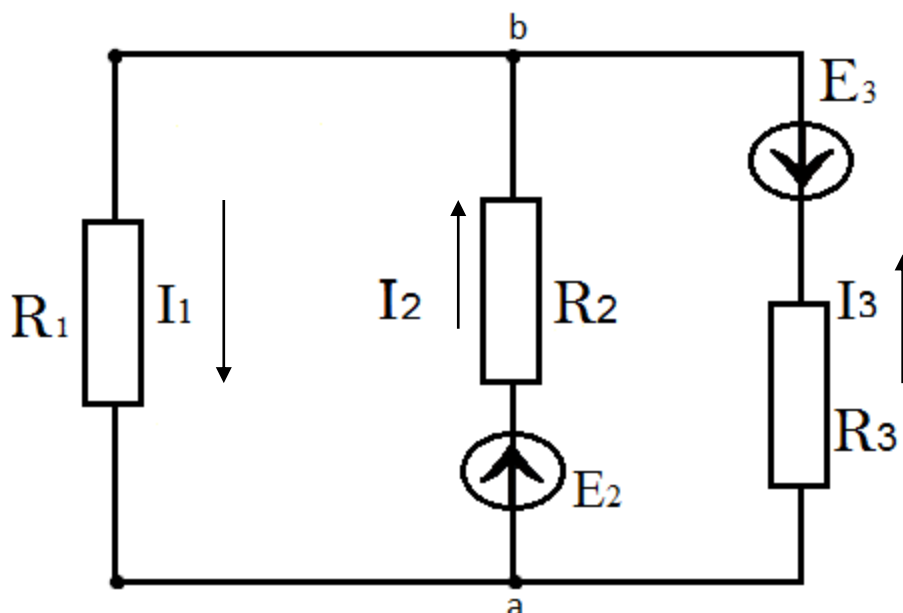


Рисунок 1.16 – Электрическая цепь

$$\varphi_a = 0.$$

$$I = \varphi_b \cdot g.$$

$$(g_1 + g_2 + g_3) \cdot \varphi_b = E_2 \cdot g_2 - E_3 \cdot g_3.$$

$$I_1 = \frac{\varphi_b}{r_1} = \frac{E_2 \cdot g_2 - E_3 \cdot g_3}{(g_1 + g_2 + g_3)} \cdot g_1.$$

$$I_2 = \frac{E_2 \cdot g_2 - E_3 \cdot g_3}{g_1 + g_2 + g_3} \cdot g_2 = \frac{\varphi_b}{r_2}.$$

1.3.2 Метод компенсации

Данный метод используется в основном при расчетах цепей или устройств с малыми величинами ЭДС (рис 1.17).

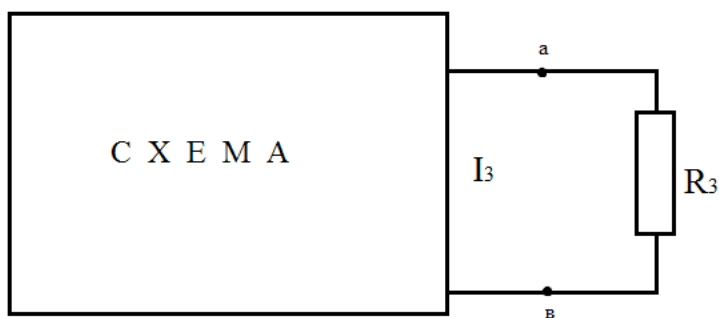


Рисунок 1.17 – Электрическая цепь с малой ЭДС

$$I_3 = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{r_3} = \frac{U_{ab}}{r_3}$$

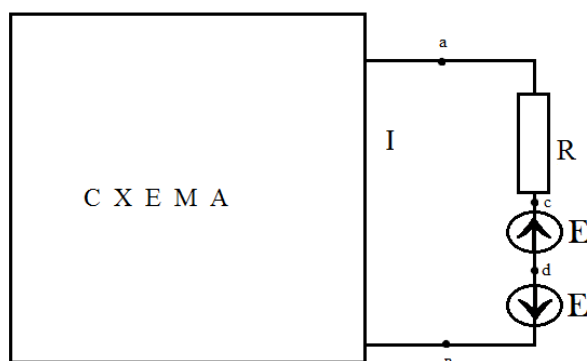


Рисунок 1.18 – Эквивалентная электрическая цепь

$$\begin{aligned}\varphi_b &= 0 \\ \varphi_d &= E'_1 \\ \varphi_c &= \varphi_d - E_1 \\ \varphi_a &= I \cdot r_3 + E'_1 - E_1\end{aligned}$$

При данном включении можно заменить активное сопротивление источником ЭДС, направленным против тока с величиной напряжения E .

1.4 Многополюсники

1.4.1 Двухполюсник и метод эквивалентного генератора

Двухполюсником называется – электрическая схема, имеющая два внешних зажима (два полюса) (рис 1.19).

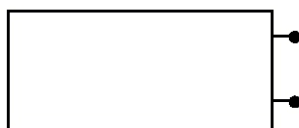


Рисунок 1.19 – Двухполюсник

Зажимы могут быть входными и выходными. Приемник – входные зажимы, источник – выходные.

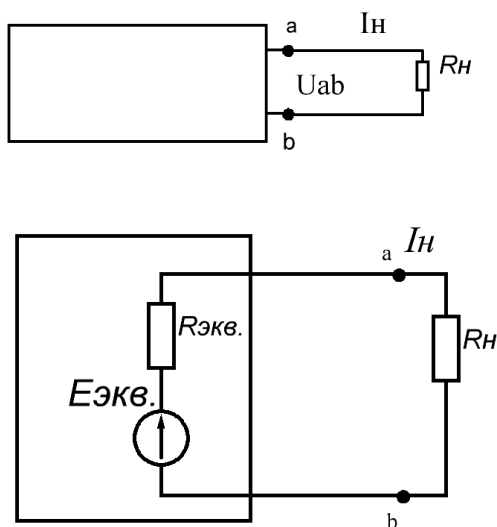


Рисунок 1.20 – Электрическая цепь с двухполюсником

$$I_H = \frac{E}{r_{\text{ЭКВ}} + r_H}$$

Если двухполюсник является источником, то $r_{\text{ЭКВ}} = r_{\text{ВЫХОДА}} \rightarrow$ источник. Если наоборот, то $r_{\text{ЭКВ}} = r_{\text{ВХОДА}}$ (рис. 1.20).

Если двухполюсник содержит хотя бы один источник энергии, то он активный, а если нет – источник пассивный. Двухполюсник позволяет значительно упростить расчеты. Одним из примеров расчета тока является метод эквивалентного генератора (активный двухполюсник). Этот метод позволяет определить ток только в одной ветви схемы. При применении этого метода выделяется ветвь, в которой необходимо определить ток. Затем определим внутренние сопротивления двухполюсника ($r_{\text{ЭКВ}}$) и $E_{\text{ЭКВ}}$.

1.4.2. Эквивалентные преобразования пассивных трехполюсников

Для определения тока I_1 первую ветвь выносим как внешнюю по отношению к двухполюснику

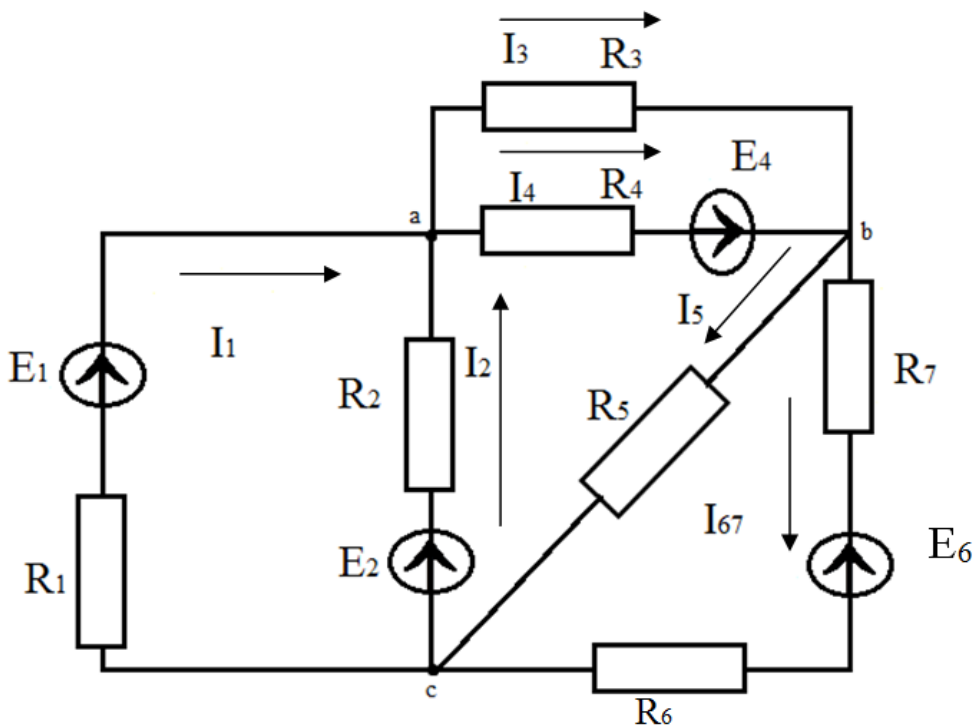


Рисунок 1.21 – Сложная электрическая цепь

Для определения $R_{\text{ЭКВ}}$ двухполюсник представим в виде пассивного (все $E = 0$) (рис 1.22). Получим смешанные соединения сопротивлений (рис. 1.23).

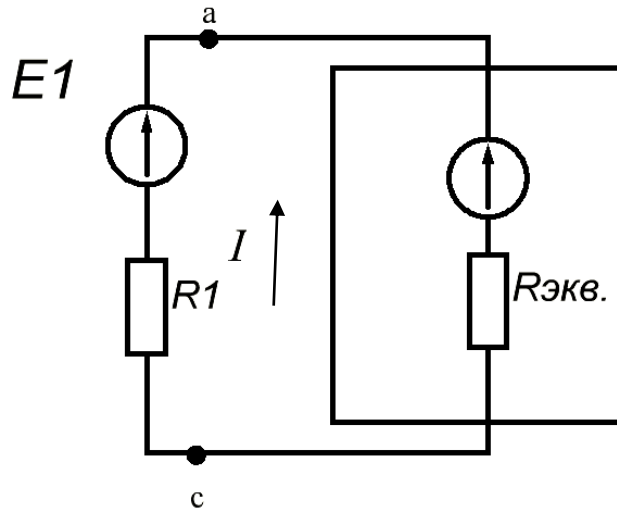


Рисунок 1.22 – Электрическая цепь с двухполюсником

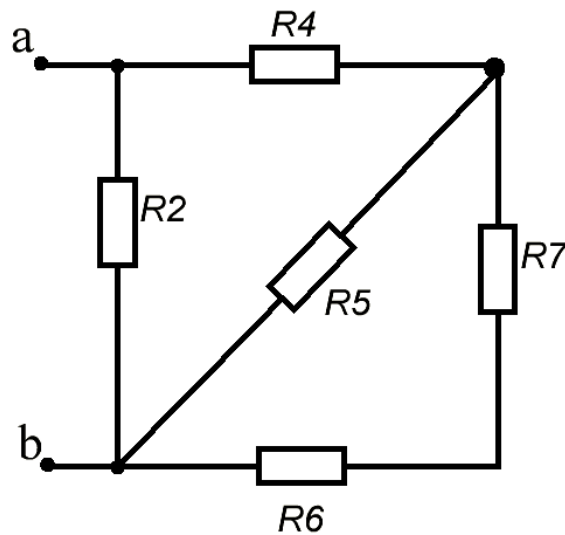


Рисунок 1.23 – Смешанное соединение сопротивлений

$$R_{\text{общ}} = R_{\text{экв.}}$$

$$r_{\text{экв}} = r_2 \parallel [(r_3 \parallel r_4) + (r_6 + r_7) \parallel r_5].$$

$$r_{\text{экв}} = \frac{r_2 \cdot \left[\frac{r_3 \cdot r_4}{r_3 + r_4} + \frac{(r_6 + r_7) \cdot r_5}{r_6 + r_7 + r_5} \right]}{r_2 + \frac{r_3 \cdot r_4}{r_3 + r_4} + \frac{(r_6 + r_7) \cdot r_5}{r_6 + r_7 + r_5}}.$$

$$I_{\text{H}} = \frac{E_{\text{экв.}} - E_1}{r_{\text{экв.}} + r_1}.$$

1.4.3 Соединение треугольником и звездой

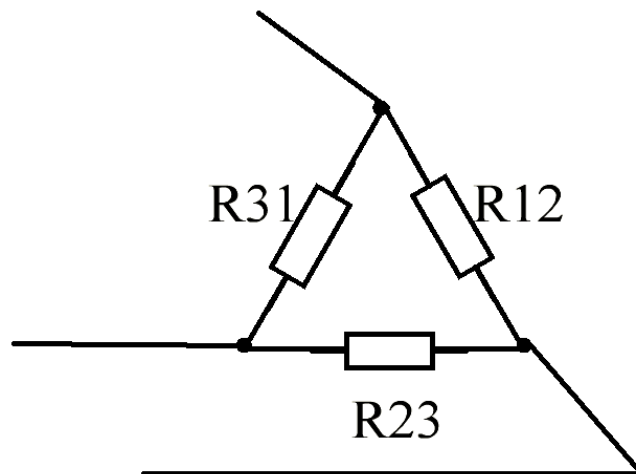


Рисунок 1.24 – Соединение треугольником

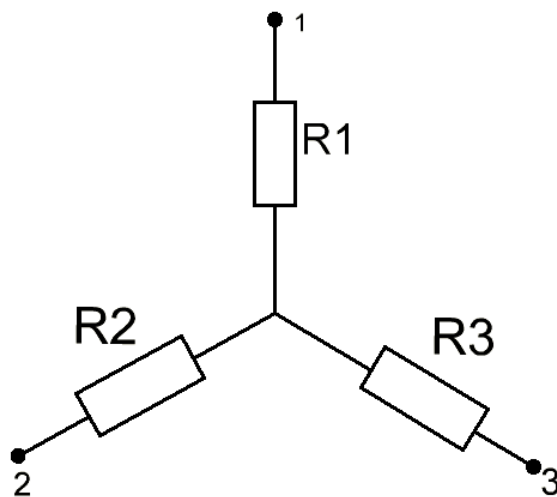


Рисунок 1.25 – Соединение звездой

Получим формулы для перехода от треугольника (рис 1.24) к звезде (рис 1.25) и наоборот. При переходе напряжение между узлами меняться не должно.

$$r_1 + r_2 = \frac{(r_{31} + r_{23}) \cdot r_{12}}{r_{31} + r_{23} + r_{12}}, \quad r_2 + r_3 = \frac{(r_{31} + r_{12}) \cdot r_{23}}{r_{31} + r_{23} + r_{12}}.$$

$$r_3 + r_1 = \frac{(r_{12} + r_{23}) \cdot r_{31}}{r_{31} + r_{23} + r_{12}}.$$

Тогда получим выражения для определения конкретных сопротивлений.

$$r_1 = \frac{r_{31} \cdot r_{12}}{r_{31} + r_{23} + r_{12}}$$

$$r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3}$$

$$r_2 = \frac{r_{12} \cdot r_{23}}{r_{31} + r_{23} + r_{12}}$$

$$r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1}$$

$$r_3 = \frac{r_{31} \cdot r_{23}}{r_{31} + r_{23} + r_{12}}$$

$$r_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_3 \cdot r_1}{r_2}$$

Определим эквивалентные сопротивления схем (рис. 1.26 и рис.1.27).

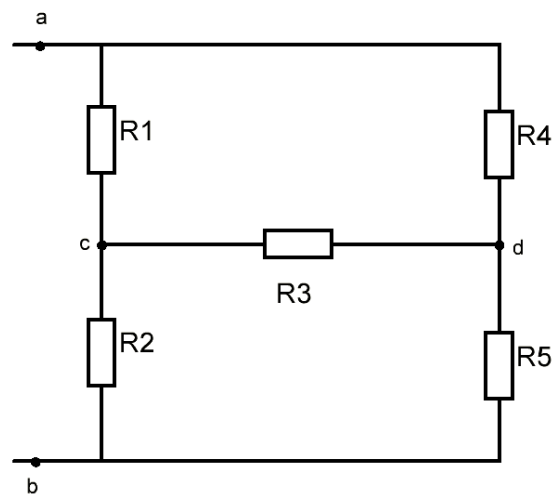


Рисунок 1.26 – Эквивалентная схема соединения сопротивлений треугольником

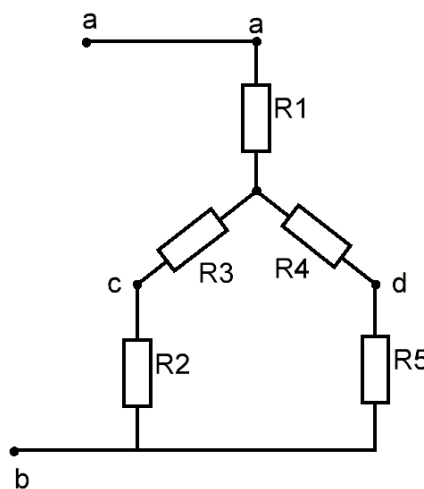


Рисунок 1.27 – Эквивалентная схема соединения сопротивлений звездой

$$r_a = \frac{r_1 \cdot r_4}{r_1 + r_4 + r_3}; \quad r_d = \frac{r_3 \cdot r_4}{r_1 + r_4 + r_3}; \quad r_c = \frac{r_1 \cdot r_3}{r_1 + r_4 + r_3}; \quad r_{\text{ЭКВ}} = r_a + \frac{(r_c + r_2)(r_d + r_5)}{r_c + r_2 + r_d + r_5}.$$

Используя полученные результаты, можно переносить источник из одной ветви в другую (рис 1.28...1.30).

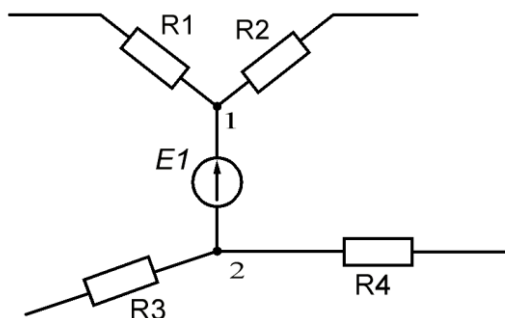


Рисунок 1.28

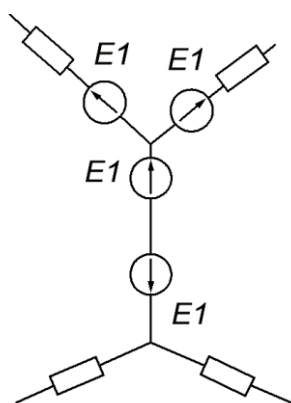


Рисунок 1.29

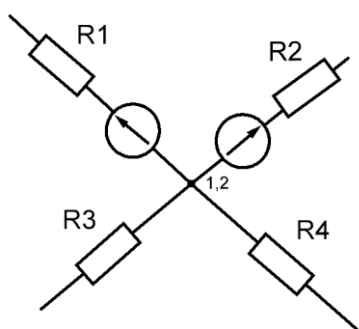


Рисунок 1.30

2 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

2.1 Основные характеристики синусоидального напряжения и тока

Напряжение и ток имеют форму синусоиды (рис. 2.1).

$$e_I = E_{Im} \sin(\omega t + \Psi'_{eI});$$

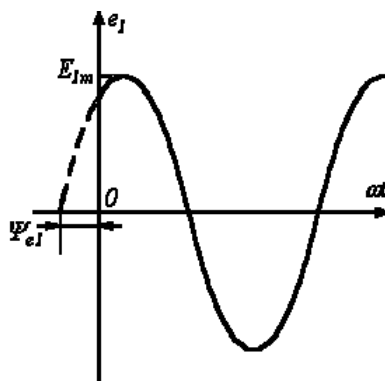


Рисунок 2.1 – График синусоиды

$$f = \frac{1}{T} \text{ [Гц]}$$

$$\alpha_{эл} = \frac{1}{360} \cdot P - \text{электрический градус.}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$e = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_e) - \text{мгновенное значение ЭДС.}$$

ψ_e – начальный фазовый угол.

E_m – амплитудное (максимальное) значение.

$(\omega \cdot t + \psi_e)$ – аргумент.

Sin – фазовый угол.

Для выполнения расчетов вводится понятие действующих напряжений, токов, ЭДС.

Действующими называются величины, которые по величине такие же, как при постоянном токе и приводят на одной и той же нагрузке к одинаковому эффекту.

$$\text{Для постоянного тока } I \rightarrow I^2 \cdot r \cdot T = \frac{U^2}{r} \cdot T.$$

Для переменного тока $I_r \rightarrow \int_0^T i^2 dt$.

Так как $i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$, то $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ и $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$.

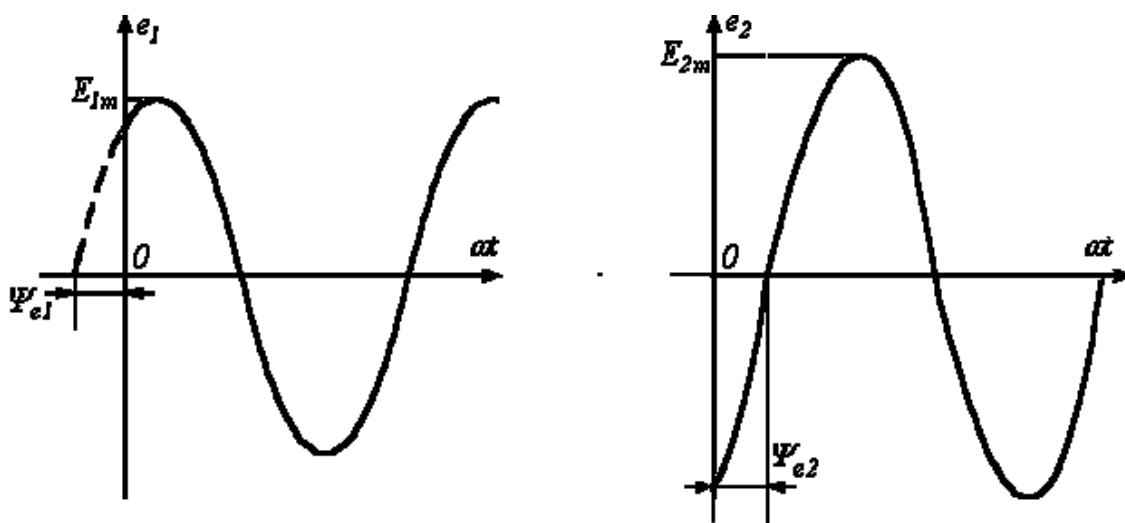


Рисунок 2.2 – График двух синусоид с разными начальными фазовыми углами

$$e_1 = E_{1m} \sin(\alpha t + \Psi_{e1}); \quad e_2 = E_{2m} \sin(\alpha t + \Psi_{e2})$$

Законы Кирхгофа выполняются для мгновенных значений. Для упрощения анализа применяют представление синусоидальных величин вращающимися векторами (рис. 2.3).

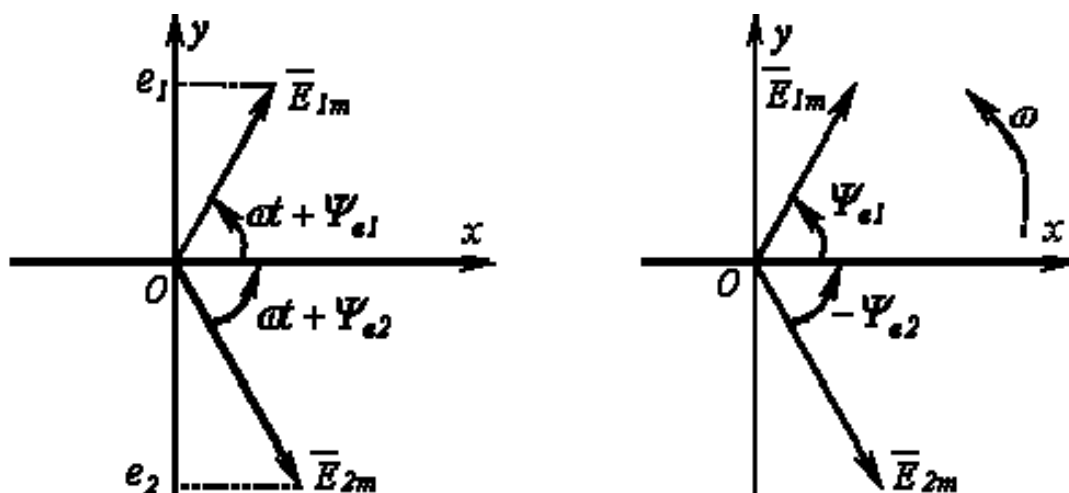


Рисунок 2.3 – Вращающийся вектор синусоидальной величины

Проекция вектора на ось ОУ является мгновенным значением синусоидальной величины (рис. 2.3).

Совокупность векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся ЭДС, напряжения и токи, называют векторными диаграммами. При построении векторных диаграмм векторы удобно располагать для начального момента времени ($t=0$), что вытекает из равенства угловых частот синусоидальных величин и эквивалентно тому, что система декартовых координат сама вращается против часовой стрелки со скоростью ω . Таким образом, в этой системе координат векторы неподвижны (рис. 2.4). Их применение делает расчет цепи более наглядным и простым. Это упрощение заключается в том, что сложение и вычитание мгновенных значений величин можно заменить сложением и вычитанием соответствующих векторов (рис. 2.4).

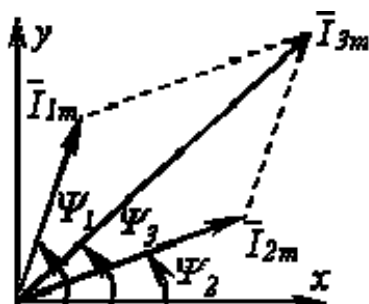


Рисунок 2.4 – Векторная диаграмма

Каждый из этих токов синусоидален и может быть представлен уравнениями

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1) \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \Psi_2)$$

Результирующий ток также будет синусоидален:

$$i_3 = I_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1) + I_{2m} \sin(\omega t + \Psi_2) = I_{3m} \sin(\omega t + \Psi_3)$$

Действующее значение тока определяется выражением:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

2.1.1 Цепь с активным сопротивлением

В цепи активного сопротивления строго выполняется закон Ома.

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_m)}{r} = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_n)$$

$$r = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}.$$

Для определения фазы (фазового сдвига) построим векторную диаграмму напряжения и тока (рис. 2.5).

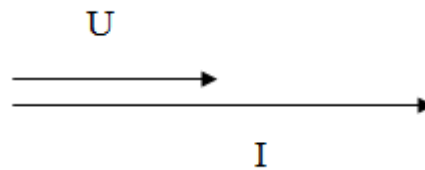


Рисунок 2.5 – Векторная диаграмма для цепи с активным сопротивлением

В цепи синусоидального тока с активными сопротивлениями напряжение и ток на этом сопротивлении совпадают по фазе (рис. 2.6).

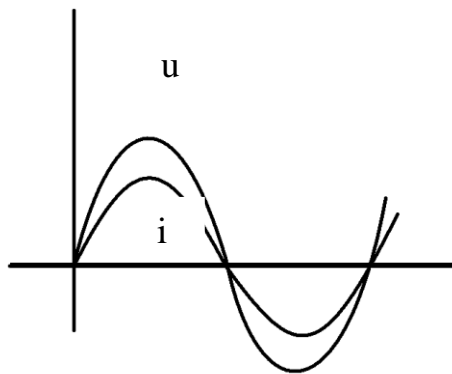


Рисунок 2.6 – Синусоиды цепи с активным сопротивлением

2.1.2 Цепь с индуктивным сопротивлением

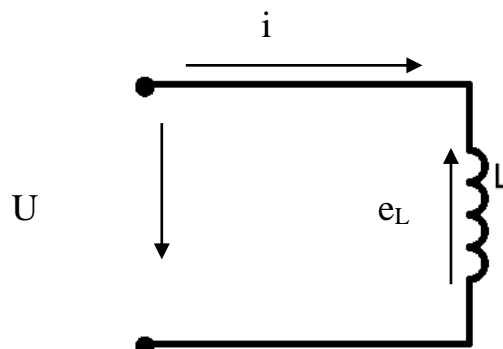


Рисунок 2.7 – Электрическая цепь с индуктивным сопротивлением

e_L – то, что препятствует изменению тока.

$$\frac{U}{I} = \omega \cdot L$$

$\omega \cdot L = x_L$ – индуктивное сопротивление.

U индуктивности опережает ток на 90° (рис. 2.8).

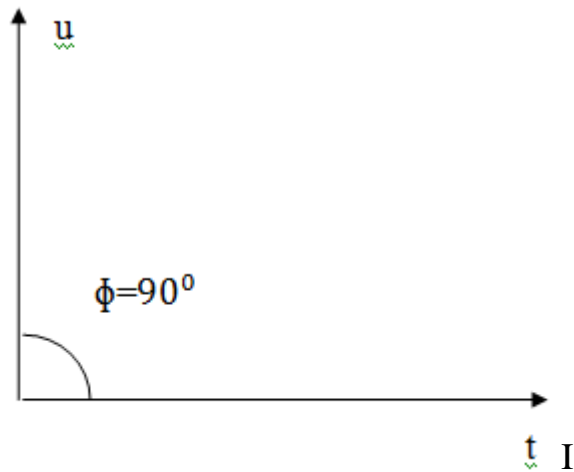


Рисунок 2.8 – Векторная диаграмма для цепи с индуктивным сопротивлением

$$W_M = L \cdot \frac{i^2}{2} - \text{энергия магнитного поля.}$$

2.1.3 Цепь с емкостным сопротивлением

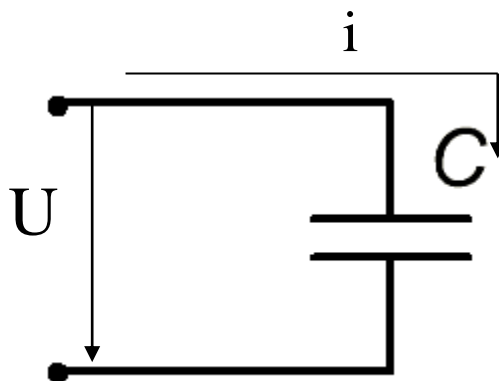


Рисунок 2.9 – Электрическая цепь с емкостным сопротивлением

$$U_c = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt \rightarrow i = C \cdot \frac{du_c}{dt} \text{ – напряжение на конденсаторе.}$$

$$U_c = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ).$$

$$U_c = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t - 90^\circ).$$

$$W_e = \frac{C \cdot u^2}{2}.$$

U емкости отстает от тока на 90° (рис. 2.10).

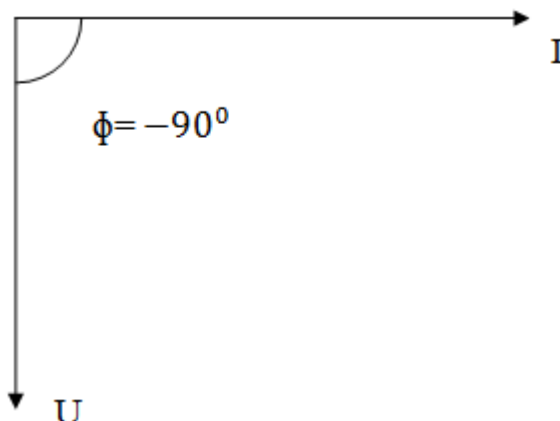


Рисунок 2.10 – Векторная диаграмма для цепи с емкостным сопротивлением

2.1.4 Последовательное соединение R, C, L элементов

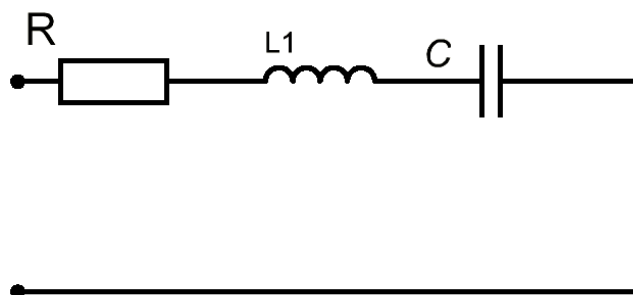


Рисунок 2.11 – Последовательное соединение R, C, L элементов

Для мгновенных напряжений по второму закону Кирхгофа будет:

$$u = i \cdot r + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt.$$

$$\bar{U} = \bar{I} \cdot r + \bar{I} \cdot x_L + \bar{I} \cdot x_C.$$

$$x_C = \frac{1}{\omega \cdot C}.$$

$$x_L = \omega \cdot L.$$

Построим векторную диаграмму (рис. 2.12):

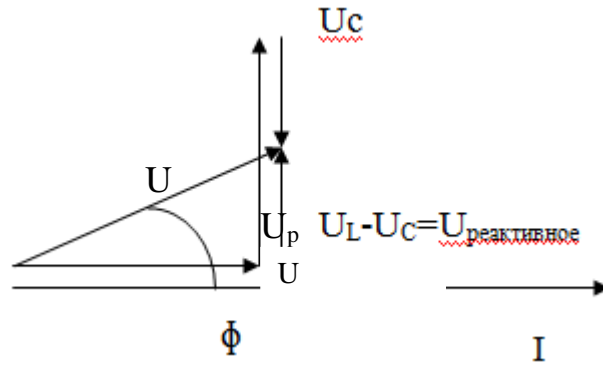


Рисунок 2.12 – Векторная диаграмма последовательного соединения R, L, C элементов

ϕ – фазовый сдвиг.

U_p – напряжение реактивное.

$$I = \frac{U}{z} \rightarrow U = I \cdot z$$

Если из векторной диаграммы векторы напряжения поделить на векторы тока, то получим треугольник сопротивлений (рис. 4.13):

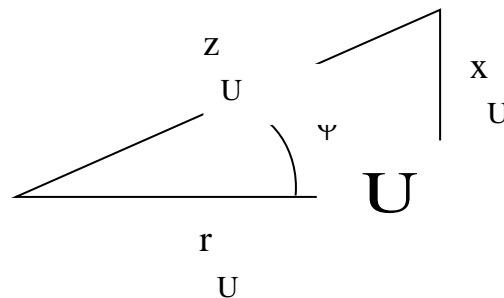


Рисунок 2.13 – Векторы сопротивления

$$x = x_L - x_C$$

z – общее сопротивление.

$$z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}.$$

Определим величину тока:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})^2}}.$$

Определим угол:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{x_L - x_C}{r}\right).$$

Определим напряжение:

$$U_a = I \cdot r.$$

$$U_L = I \cdot \omega \cdot L.$$

$$U_C = I \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}.$$

Пример:

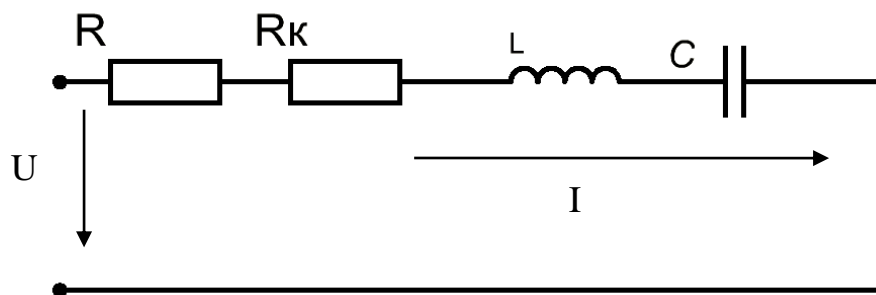


Рисунок 2.14 – Последовательное соединение R, L, C элементов

Дано:

$$u = 311 \cdot \sin(314 \cdot t + 60^\circ) \text{ (В)}$$

$$r = 4 \text{ (Ом)}$$

$$r_k = 4 \text{ (Ом)}$$

$$L = 0,07 \text{ (Гн)}$$

$$C = 200 \text{ (мкФ)}$$

Найти:

I - ?

i - ?

Решение:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220 \text{ (В)}$$

$$\omega = 314 \text{ с}^{-1}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = 50 \text{ (Гц)}$$

$$z = \sqrt{(r + r_k)^2 + (x_L - x_C)^2} = 10 \text{ (Ом)}$$

$$I = \frac{U}{z} = \frac{220}{10} = 22 \text{ (А)}$$

Для построения векторной диаграммы найдем напряжение на каждом элементе:

$$U_r = 22 \cdot 4 = 88 \text{ (В)}$$

$$U_{rk} = 22 \cdot 4 = 88 \text{ (В)}$$

$$U_L = 22 \cdot 314 \cdot 0,07 = 484 \text{ (В)}$$

$$U_C = \frac{22 \cdot 10^6}{314 \cdot 200} = 352 \text{ (В)}$$

$$U_k = \sqrt{U_{rk}^2 + U_L^2} = \sqrt{88^2 + 484^2} = 485 \text{ (В)}$$

Построим векторную диаграмму (рис 2.15):

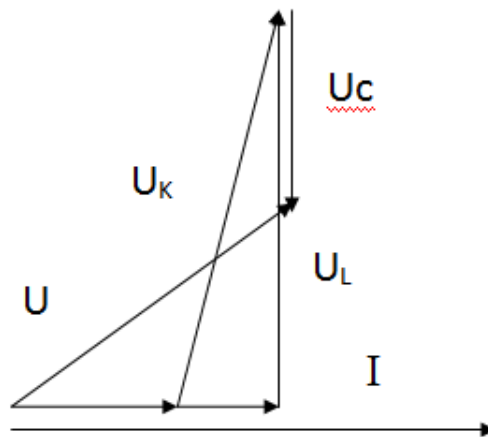


Рисунок 2.15 – Векторная диаграмма

$$\varphi = \arctg \left(\frac{x_L - x_C}{r + r_k} \right) = 37^\circ$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi - \varphi) = 22 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t + 60^\circ - 37^\circ) = 31,1 \cdot \sin(314 \cdot t + 23^\circ).$$

2.1.5 Резонанс напряжения

При последовательном соединении активных и реактивных приемников в цепи возможен резонанс напряжений (рис.2.16).

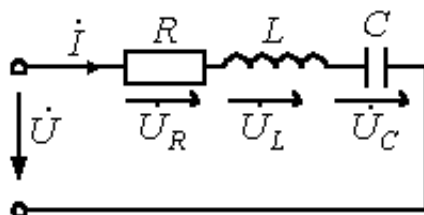


Рисунок 2.16 – Последовательное соединение элементов

Если $x_L = x_C$, то в схеме наблюдается резонанс напряжений (рис. 2.17).

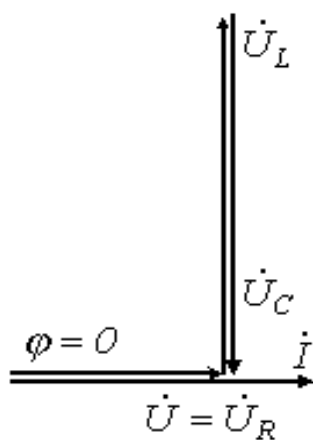


Рисунок 2.17 – Резонанс напряжений

При резонансе напряжений $\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C}$.

Откуда $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ – резонансная частота.

Фазовый сдвиг между напряжением и током при резонансе отсутствует $\varphi_{\text{рез}} = 0$;

Ток при резонансе напряжений зависит только от активного сопротивления цепи $I_{\text{рез}} = \frac{U}{r}$.

При резонансе напряжений или режимах, близких к нему, ток в цепи резко возрастает. В теоретическом случае при $R=0$ его величина стремится к бесконечности. Соответственно возрастанию тока увеличиваются напряжения на индуктивном и емкостном элементах, которые могут во много раз превысить величину напряжения источника питания.

Для уменьшения напряжения на реактивных элементах последовательно включаем активное сопротивление, чтобы уменьшить ток. Характер изменения тока, напряжений, сопротивлений от частоты носит название частотных характеристик.

При резонансе сопротивление индуктивного элемента равно сопротивлению емкостного элемента и называется волновым сопротивлением.

$$\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ — волновое сопротивление.}$$

Важной характеристикой резонансного контура является добротность Q , определяемая отношением напряжения на индуктивном (емкостном) элементе к входному напряжению:

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1}{\omega_p C R}$$

Добротность характеризует “избирательные” свойства резонансного контура, в частности его полосу пропускания.

Явление резонанса находит полезное применение на практике, в частности в радиотехнике. Однако, если он возникает стихийно, то может привести к аварийным режимам вследствие появления больших перенапряжений и сверхтоков.

Физическая сущность резонанса заключается в периодическом обмене энергией между магнитным полем катушки индуктивности и электрическим полем конденсатора, причем сумма энергий полей остается постоянной.

Суть дела не меняется, если в цепи имеется несколько индуктивных и емкостных элементов. В этом случае равенство реактивных сопротивлений выполняется для эквивалентных значений L_{Σ} и C_{Σ} .

$$L_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n L_k; \quad 1/C_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n 1/C_k$$

Режима резонанса можно добиться путем изменения параметров L и C , а также частоты.

$$W = W_L + W_e; \quad W_L = L \cdot \frac{i^2}{2}; \quad W_e = \frac{C \cdot U^2}{2}; \quad i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

$$W = \frac{L \cdot I_m^2}{2} \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + \frac{C \cdot U_{mc}^2}{2} \cdot \cos^2(\omega \cdot t) = \frac{L \cdot I_m^2}{2} + \frac{C \cdot U_{mc}^2}{2} = \text{const.}$$

2.2 Расчёт электрической цепи при параллельном соединении

2.2.1 Параллельное соединение ветвей в цепи однофазного тока

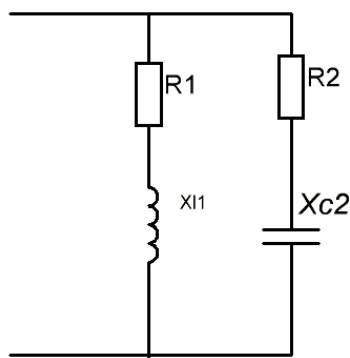


Рисунок 2.18 – Параллельное соединение ветвей

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{r_1^2 + X_L^2}}.$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{r_2^2 + X_C^2}}.$$

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2.$$

$$I = I_1 + I_2$$

Построим векторную диаграмму данной системы (рис. 2.19).

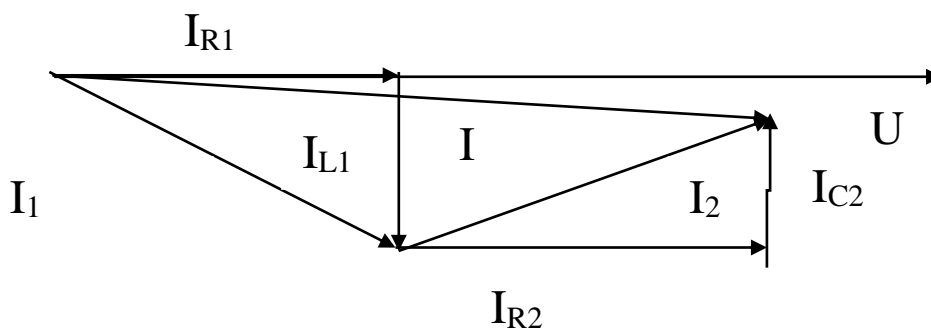


Рисунок 2.19 – Векторная диаграмма

$$I_1 = \sqrt{I_{a_1}^2 + I_{p_1}^2}$$

$$I_1 = \sqrt{(I_{a_1} + I_{a_2})^2 + (I_{p_1} + I_{p_2})^2}$$

Пример:

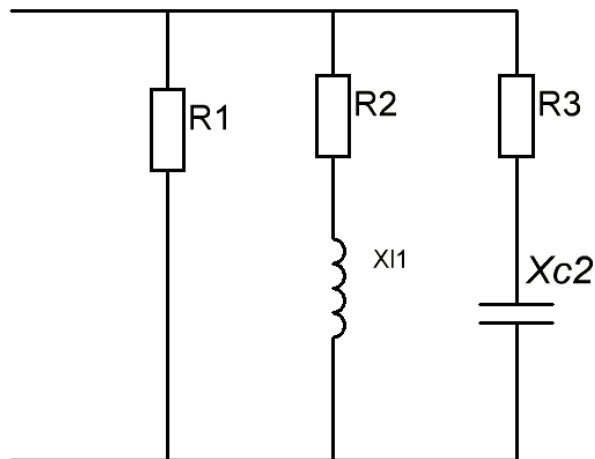


Рисунок 2.20– Схема с параллельным соединением

Дано:

$$R_1 = 20 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 3 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 8 \text{ Ом};$$

$$X_L = 4 \text{ Ом};$$

$$X_C = 6 \text{ Ом};$$

$$U = 220 \text{ В}.$$

Найти: I

Решение:

Для расчета токов условно принимают, что ток состоит из активной составляющей и реактивной составляющей.

$$\begin{aligned} I_{\text{актив.}} &= I \cos \varphi \\ I_{\text{реакт.}} &= I \sin \varphi \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{220}{20} = 11 \text{ (A)}.$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{220}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 44 \text{ (A)}.$$

$$I_3 = \frac{U}{Z_3} = \frac{220}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 22 \text{ (A)}.$$

$$I_{1a} = I_1; I_{1p} = 0;$$

$$I_{2a} = I_2 \cdot \frac{r_2}{z_2} = 44 \cdot \frac{4}{5} = 25.4 \text{ (A)}.$$

$$I_{2p} = I_2 \cdot \frac{Xl_2}{z_2} = 44 \cdot \frac{4}{5} = 33.2 \text{ (A)}.$$

$$I_{3a} = I_3 \cdot \frac{r_3}{z_3} = 22 \cdot \frac{8}{10} = 17.6 \text{ (A)}.$$

$$I_{3p} = I_3 \cdot \frac{Xc_3}{z_3} = 22 \cdot \frac{6}{10} = 13.2 \text{ (A)}.$$

$$I = \sqrt{(I_{a1} + I_{a2} + I_{a3})^2 + (I_{p1} + I_{p2} - I_{p3})^2} = 57.5 \text{ (A)}.$$

$$\cos \phi = \frac{\sum I_a}{I} = 0.94.$$

2.2.2 Метод проводимостей

Метод упрощает решение задач в цепях с параллельным и смешанным соединением.

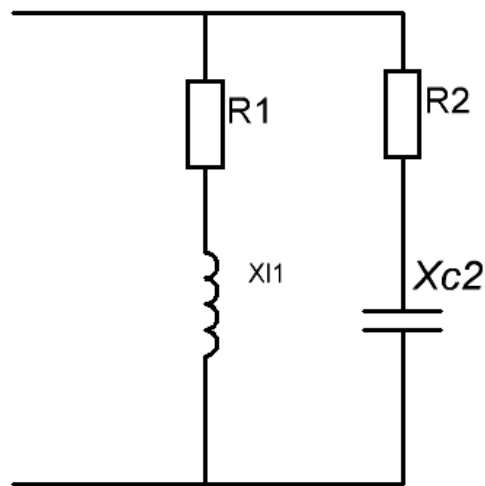


Рисунок 2.21 – Параллельное соединение ветвей

В цепях переменного тока различаем активную, реактивную и полную проводимость, которые определяются из ранее рассмотренных выражений.

$$I_a = I \cos \phi; \quad I_p = I \sin \phi; \quad I = \frac{U}{Z};$$

$$\cos \phi = \frac{r}{z}; \quad \sin \phi = \frac{x}{z};$$

$$I_a = \frac{u}{z} \cdot \frac{r}{z} = \frac{ur}{z^2} = U \cdot g, \quad g = \frac{r}{z^2} \text{ - активная проводимость.}$$

$$I_p = \frac{u}{z} \cdot \frac{x}{z} = \frac{ux}{z^2} = U \cdot b, \quad b = \frac{x}{z^2} \text{ - реактивная проводимость.}$$

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \frac{1}{z} \text{ - полная проводимость.}$$

Единица измерения проводимости $\Rightarrow \frac{1}{\text{ом}}$ \Rightarrow сименс = [см].

$$y = \sqrt{g^2 + (b_1 - b_2)^2};$$

$$I_1 = U \cdot g_1 = U \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2};$$

$$I_2 = U \cdot g_2 = U \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2};$$

Для нахождения общего тока (сопротивление) определим общую проводимость двух ветвей.

$$Y_{\text{общ.}} = \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

$$I = U \cdot y_{\text{общ.}}$$

Пример:

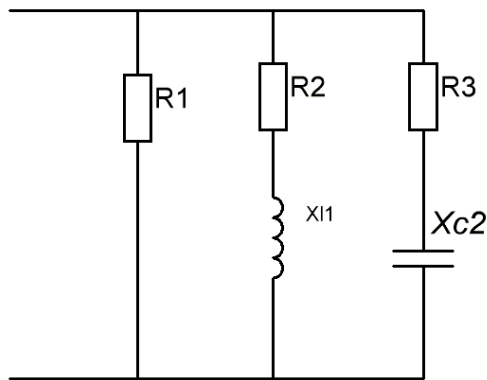


Рисунок 2.22 - Схема с параллельным соединением

Дано:

$R_1 = 20 \text{ Ом}; R_2 = 3 \text{ Ом}; R_3 = 8 \text{ Ом}; X_L = 4 \text{ Ом}; X_C = 6 \text{ Ом};$

$U = 22 \text{ В}$

Найти: I .

Решение:

Для решения задачи определяем активное и реактивное сопротивление

$$g_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ см}; \quad b_1=0; \quad y_1=g_1=0,05 \text{ см};$$

$$g_2 = \frac{r_2}{z_2^2} = 0,125 \text{ см}; \quad b_2 = \frac{x_{l2}}{z_2^2} = 0,16 \text{ см}; \quad y_2 = \sqrt{g_2^2 + b_2^2} = 0,2 \text{ см};$$

$$g_3 = \frac{r_3}{z_3^2} = 0,8 \text{ см}; \quad b_3 = \frac{x_{c3}}{z_3^2} = \frac{6}{8^2 + 6^2} = 0,06 \text{ см}; \quad y_3 = \sqrt{g_3^2 + b_3^2} = 0,01 \text{ см};$$

$$y_{\text{эКВ.}} = \sqrt{(g_1 + g_2 + g_3)^2 + (b_2 - b_3)^2} = 0,262 \text{ см};$$

$$I_1 = U_1 y_1 = 220 \cdot 0,05 = 11 \text{ А};$$

$$I_2 = U_1 y_2 = 220 \cdot 0,2 = 44 \text{ А};$$

$$I_3 = U \cdot y_3 = 220 \cdot 0,1 = 22 \text{ А};$$

$$I_{\text{общ.}} = U \cdot y_{\text{эКВ.}} = 220 \cdot 0,262 = 57,5 \text{ А};$$

$$Z = \frac{1}{y_{\text{эКВ.}}} = \frac{1}{0,262} = 3,82 \text{ см};$$

$$X_{\text{эКВ.}} = b_{\text{эКВ.}} \cdot z_{\text{эКВ.}}^2 = (0,16 - 0,06) \cdot 3,82^2 = 1,42 \text{ см}.$$

Если $x_{\text{эКВ.}} > 0$, то индуктивный характер, если $x_{\text{эКВ.}} < 0$, то емкостное.

2.2.3 Резонанс токов

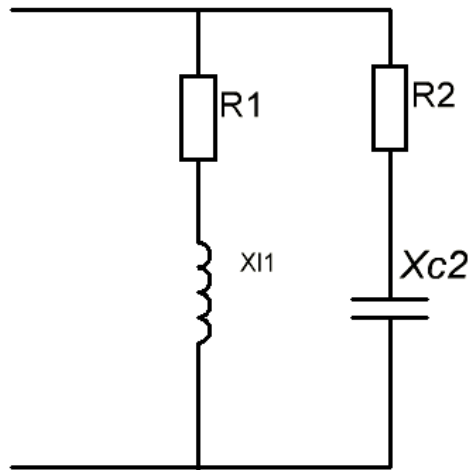


Рисунок 2.23 – Параллельное соединение ветвей

При параллельном соединении индуктивностей и емкостей (рис. 2.23) возможен резонанс токов.

Условие резонанса: $b_l = b_c$.

$$b_l = \frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2} = \frac{\omega L}{r_1^2 + \omega L^2} .$$

$$b_c = \frac{1}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^2} .$$

$$\omega_{oi} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - r_1^2}{\frac{L}{C} - r_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - r_1^2}{\rho^2 - r_2^2}} .$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} .$$

Если $r_1=r_2=\rho$, то $\omega_{oi} = \frac{0}{0}$, резонанс будет на всех частотах.

2.3 Смешанное соединение ветвей в цепи переменного тока

2.3.1 Расчет цепей при смешанном соединении элементов

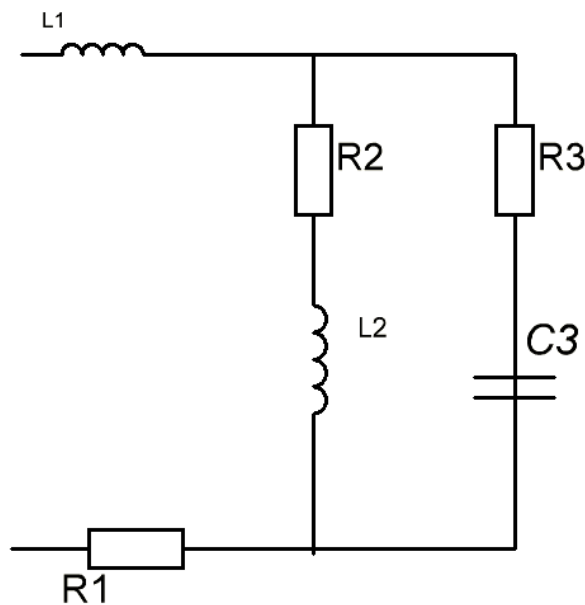


Рисунок 2.24 – Смешанное соединение

$$x_L = \omega L .$$

$$x_c = \frac{1}{\omega c} .$$

Для расчета схем смешанного соединения элементов (рис. 2.24) удобно применять метод проводимостей.

Сначала определим проводимости параллельного соединения ветвей.

$$g_2 = \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} \quad . \quad x_2 = \omega \cdot L_2 \quad .$$

$$b_2 = \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2} \quad .$$

$$g_3 = \frac{r_3}{r_3^2 + x_3^2} \quad . \quad x_3 = \frac{1}{\omega \cdot C_3} \quad .$$

$$b_3 = \frac{x_3}{r_3^2 + x_3^2} \quad .$$

$$y = \sqrt{(g_2 + g_3)^2 + (b_2 - b_3)^2} \quad - \text{общая проводимость.}$$

Определяем эквивалентное соединения ветвей.

$$Z_{23} = \frac{1}{y_{23}},$$

$$r_{23} = g_{23} \cdot Z_{23}^2;$$

$$x_{23} = b_{23} \cdot Z_{23}^2$$

$b_2 > b_3$ – индуктивное сопротивление

Преобразуем схему (рис 2.25):

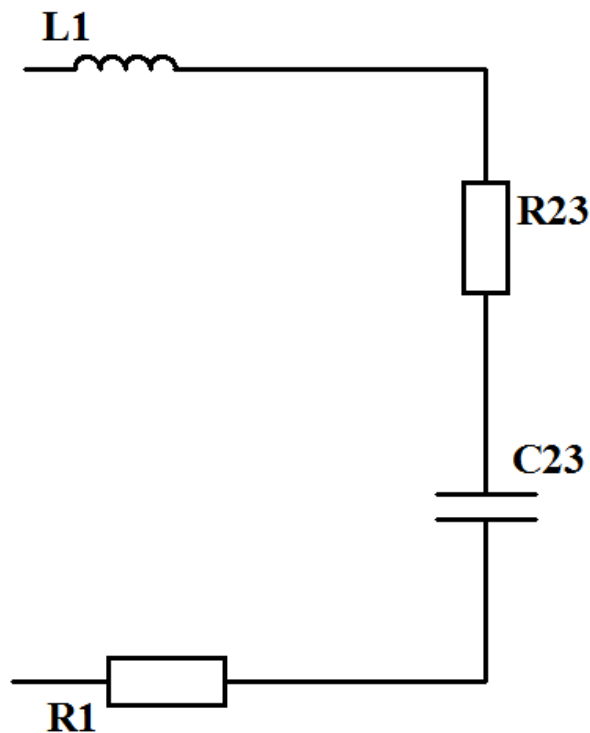


Рисунок 2.25 – Эквивалентная схемат для смешанного соединения

$$I_1 = \frac{U}{Z_{\text{общ.}}} = \frac{U}{\sqrt{(r_{23} + r_1)^2 + (x_1 + x_{23})^2}}.$$

$$x_1 = \omega \cdot L_1.$$

$$U_{23} = I_1 \cdot Z_{23}; \quad I_2 = \frac{U_{23}}{\sqrt{r_2^2 + x_2^2}} \quad I_3 = \frac{U_{23}}{Z_3} = \frac{U_{23}}{\sqrt{r_3^2 + x_3^2}}.$$

Определим фазовый сдвиг между напряжением U и током I_1 .

$$\cos \varphi = \frac{r_{23} + r_1}{z} = \frac{r_{23} + r_1}{\sqrt{(r_{23} + r_1)^2 + (x_1 + x_{23})^2}}.$$

Так как эквивалентная схема носит индуктивный характер, то ток I_1 будет отставать по фазе на угол φ по напряжению U .

Определим напряжение на каждом элементе схемы.

$$U = I \cdot R(Z); \quad x_1 = \omega L_1; \quad U_{12} = I_1 \cdot x_1; \quad U_{25} = I_2 \cdot r_2; \quad U_{53} = I_2 \cdot x_2; \quad x_3 = \frac{1}{\omega \cdot c_3};$$

$$U_{26} = I_3 \cdot r_3; \quad U_{63} = I_3 \cdot x_3; \quad I_{2a} = I_2 \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + x_2^2}}; \quad I_{2p} = I_2 \frac{x_2}{\sqrt{r_2^2 + x_2^2}}; \quad I_{3a} = I_3 \frac{r_3}{\sqrt{r_3^2 + x_3^2}}$$

$$I_{3p} = I_3 \frac{x_3}{\sqrt{r_3^2 + x_3^2}}$$

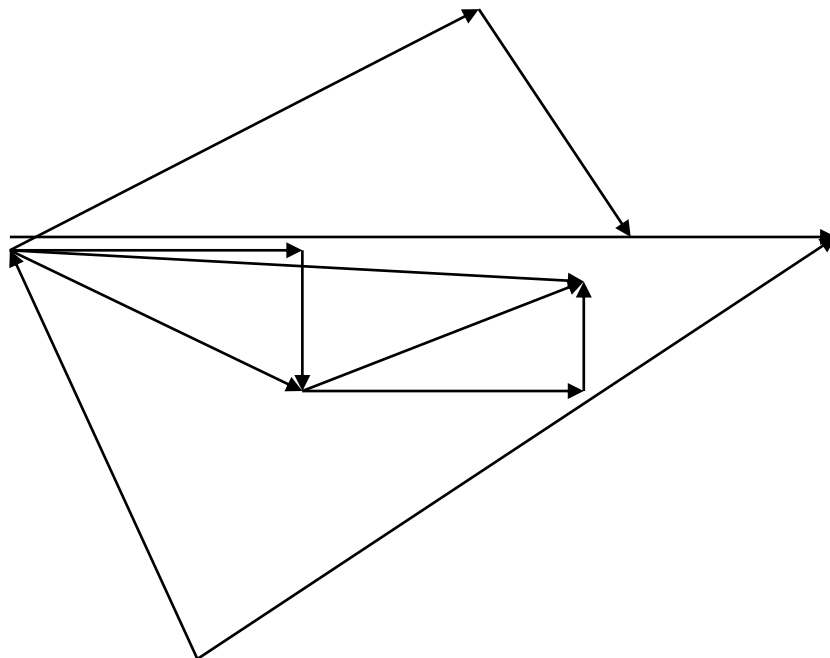


Рисунок 2.26 – Векторная диаграмма для смешанного соединения

2.3.2 Мощность синусоидального тока

Рассчитывается по тем же формулам:

$$\begin{aligned}
 p &= U \cdot I; \\
 U &= U_m \cdot \sin \omega t; \\
 i &= I_m \cdot \sin(\omega t \pm \varphi); \\
 p &= U_m \cdot I_m \cdot \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi); \\
 \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \\
 p &= \frac{U_m I_m}{Z} \cos \varphi - \frac{U_m I_m}{Z} \cos(2\omega t + \varphi)
 \end{aligned}$$

Активная мощность (рис. 2.27) – это среднее значение мощности за период:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{T} \int_0^T p \cdot dt = \frac{U_m I_m}{Z} \cdot \cos \varphi = U \cdot I \cdot \cos \varphi. \\
 p &= U_a \cdot I = I_a \cdot U = I^2 \cdot r = U^2 \cdot g = U \cdot I \cdot \cos \varphi
 \end{aligned}$$

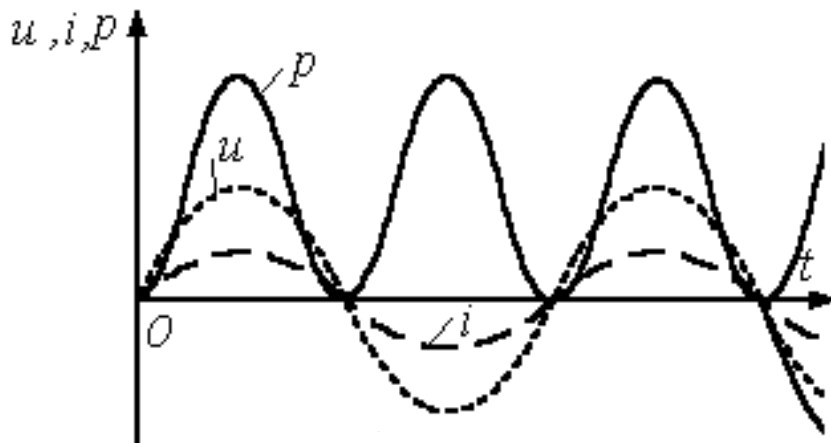


Рисунок 2.27 – График активной мощности

Реактивная мощность (рис 2.28):

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = I^2 \cdot x = U^2 \cdot b.$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI.$$

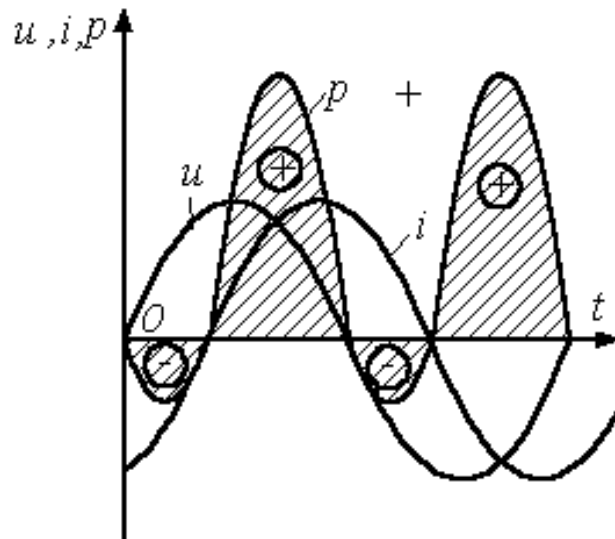


Рисунок 2.28 – График реактивной мощности

Коэффициент мощности:

$$\frac{P}{S} = \cos \varphi$$

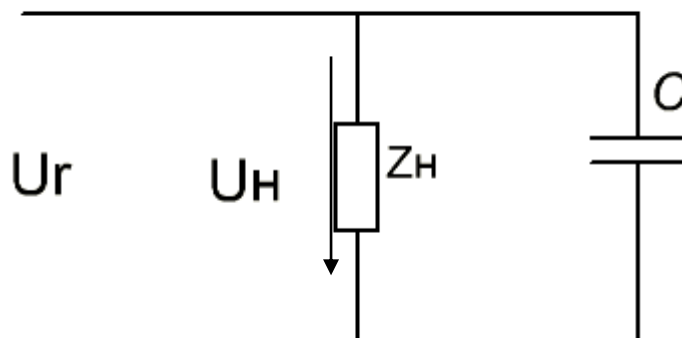


Рисунок 2.29 - Параллельное соединение активной и емкостной нагрузки

$$P_n = U_n \cdot I_n \cdot \cos \varphi_n$$

$$\Delta P_{\text{л}} = I_n^2 \cdot r_{\text{л}} = \frac{P_n^2}{U^2 \cos^2 \varphi_n} \cdot r_{\text{л}}$$

$$\Delta P_{\text{л}} \rightarrow \min \cos \varphi = 1$$

Для увеличения $\cos \varphi$ параллельно нагрузке включают батарею конденсаторов.

В случае резонанса токов:

$$\frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \varphi$$

2.3.3 Схемы замещения реальной катушки индуктивности

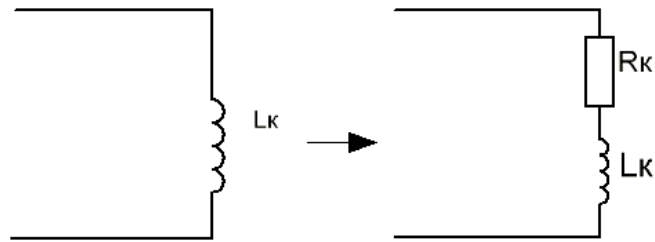


Рисунок 2.30 – Схемы замещения

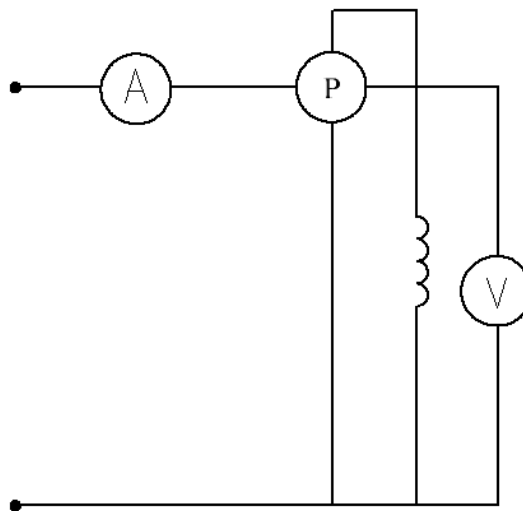


Рисунок 2.31 – Цепь с ваттметром

Соотношения для реальной катушки:

$$Z_k \approx \frac{U}{I}; P = U \cdot I \cdot \cos \varphi_k; P = I^2 \cdot r_k; r_k = \frac{P}{I^2}$$

$$X_k = \sqrt{z_k^2 - r_k^2}$$

2.4 Символический метод расчёта цепей синусоидального тока

2.4.1 Основные операции над комплексными числами

$$\underline{A} = \pm a + jb$$

$$\underline{A} = a + jb = A \cos \alpha + jA \sin \alpha = A$$

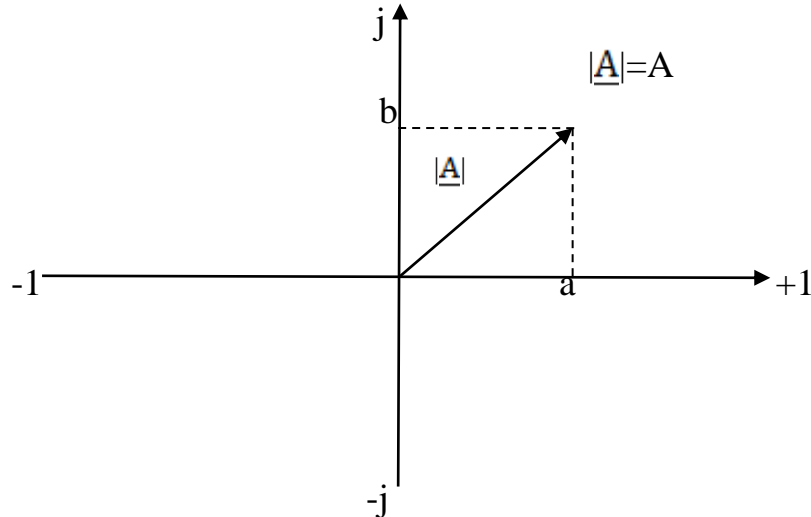


Рисунок 2.32 – Графическое представление комплексного числа

$$|A| = A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{b}{a} \text{ (с учетом знака).}$$

Для выполнения алгебраического сложения (рис 2.33) используется алгебраическая форма комплексного числа:

$$\underline{A} = a + jb; \quad \underline{B} = c - jd; \quad \underline{A} + \underline{B} = (a+c) + j(b-d).$$

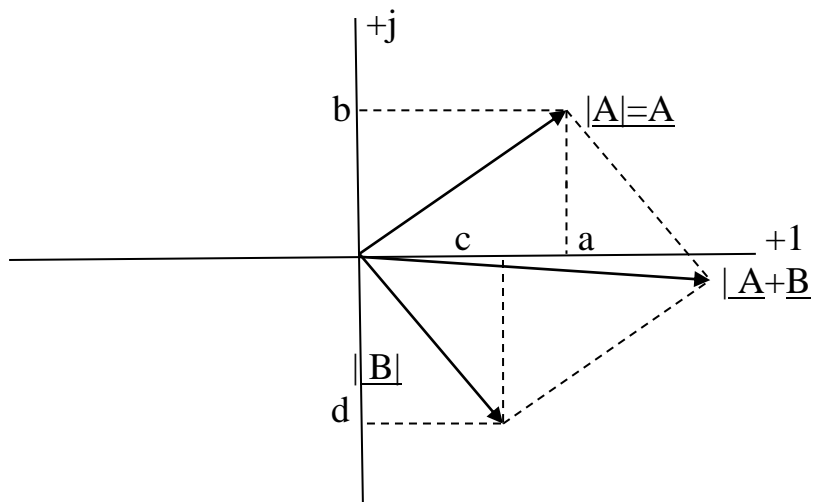


Рисунок 2.33 – Сложение комплексных чисел

Умножение комплексных чисел удобно выполнять при показательной форме их представления:

$$\operatorname{arctg} \frac{-d}{c} = -\beta = 360^\circ - \beta.$$

$$\underline{A} = A e^{j\alpha}.$$

$$\underline{B} = e^{j(360^\circ - \beta)} = B e^{j\beta}.$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A \cdot B e^{-j(\alpha + \beta)}.$$

Для представления числа в показательной форме определяется модуль и угол:

$$\underline{A} = a + jb.$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

$$A = A e^{j\beta}.$$

$$B = B e^{j\beta}.$$

$$B = B \cos \beta + jB \sin \beta = b + jd.$$

$$\underline{A} = a + jb = A e^{j\alpha}.$$

$$\underline{A}^* = a - jb = A e^{-j\alpha}.$$

$$\underline{A} + \underline{A}^* = 2a.$$

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^* = A^2.$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = +j.$$

$$e^{-j90^\circ} = -j.$$

$$j = \sqrt{-1}.$$

$$j^2 = -1.$$

$$j^3 = -j.$$

$$j^4 = 1.$$

Примеры:

1) Дано: $\underline{A} = 3 + j4$.

2)

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$$

Графически он выглядит следующим образом (рис 2.34):

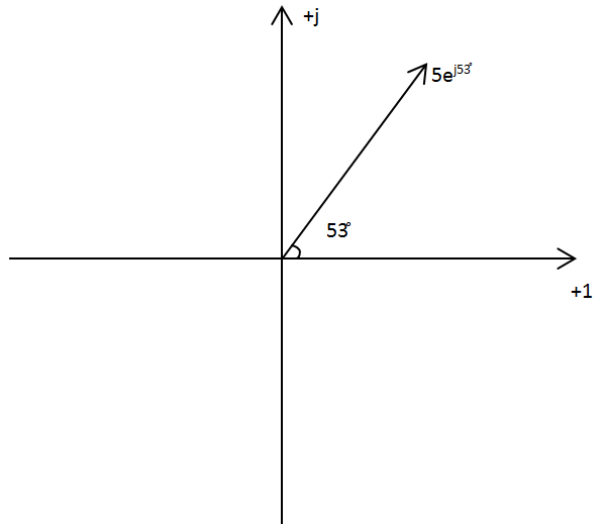


Рисунок 2.34 – Графическое представление числа A

2) Дано: $\underline{B} = -4 + j3$;

$$B = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5;$$

$$\alpha = \arctg -\frac{4}{3}$$

$$\beta = 180 - 37 = 143^\circ;$$

$$\underline{B} = 5e^{j143^\circ}$$

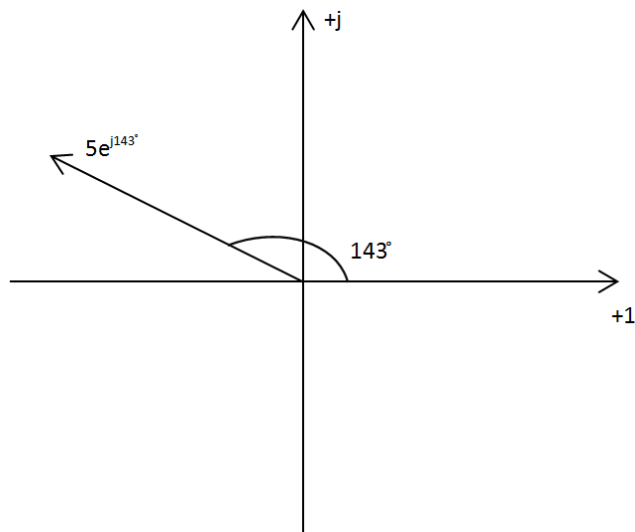


Рисунок 2.35 – Графическое представление числа B

3) Перевести из показательной формы в алгебраическую:

$$\underline{A} = 145e^{-j45^\circ}$$

$$145 \cdot \cos 45^\circ - j \cdot 145 \cdot \sin 45^\circ = 102,5 - j102,5.$$

Если показатель положительный, то вектор опережает, отрицательный - отстает.

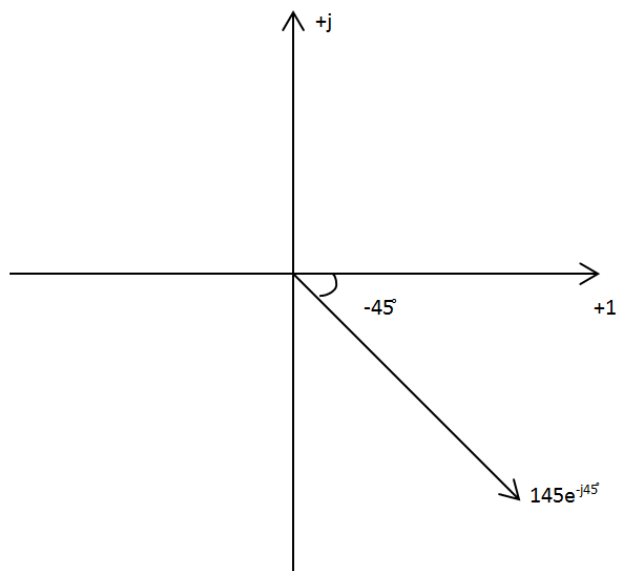


Рисунок 2.36 – Графическое представление числа \underline{B}

2.4.2 Представление синусоидальных величин

Напряжение в комплексной форме:

$$U = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U_m e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_u} = U_m e^{j\omega t};$$

$$((U_m e^{j\varphi_u}) = U_m)$$

$$\text{если } t=0, \text{ то } U_m = U_m e^{j\varphi_u} = U_m \cos \varphi_u + jU_m \sin \varphi_u$$

Для получения синусоидальной функции из комплексного числа необходимо взять мнимую часть комплексного числа.

Пример:

$$U = 311 \sin(314t + 30).$$

$$\underline{U}_m = 311 e^{+j30^\circ} \text{ (амплитуда).}$$

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{+j30^\circ} = 220 e^{j30^\circ} \text{ (действующее значение).}$$

$$(U_m \cos \Psi_u + jU_m \sin \Psi_u).$$

$$220 \cos 30^\circ + j220 \sin 30^\circ.$$

$$U = 311 \sin(\omega t + 30^\circ).$$

$$i = 45 \sin(\omega t - 90).$$

$$U_m = 45 \sin e^{+j90^\circ}.$$

$$\underline{U} = \frac{45}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ} = -j \frac{45}{\sqrt{2}}.$$

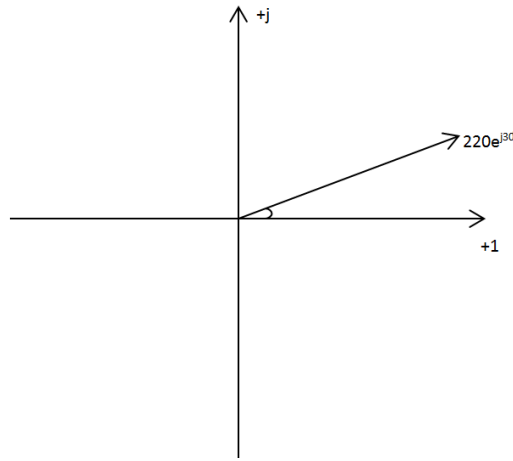


Рисунок 2.37 – Графическое представление напряжения

Представить в виде мгновенного значения:

$$\underline{E} = 85e^{j75^\circ}; \quad E_m = \sqrt{2} E;$$

$$e = \sqrt{2} \cdot 85 \sin(\omega t + 75^\circ).$$

2.4.3 Комплекс сопротивления

В комплексной форме можно применить закон Ома для любого определения сопротивления цепи переменного тока.

а) Активное сопротивление:

$$\underline{Z}_r = \frac{U}{I} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi_e} = \frac{U}{I} = r$$

$$\Psi_U - \Psi_I = \varphi.$$

$$\Psi_U = \Psi_I \text{ - активное.}$$

б) Индуктивное сопротивление:

$$X_L = \omega L \quad \Psi_u - \varphi_i = 90^\circ$$

$$\underline{Z}_L = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = X_L \cdot e^{j90^\circ} = jX_L = j\omega L$$

в) Емкостное сопротивление:

$$\underline{Z}_C = -jX_C = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}.$$

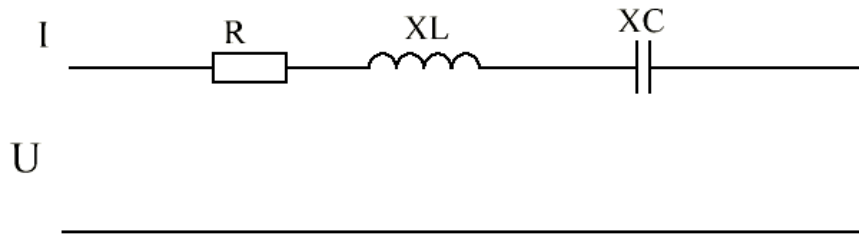


Рисунок 2.38 – Последовательное соединение R,C,L элементов

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} = r + jXL - jX_c = r + j(XL - X_c)$$

Определим токи и все напряжения для приведенной схемы

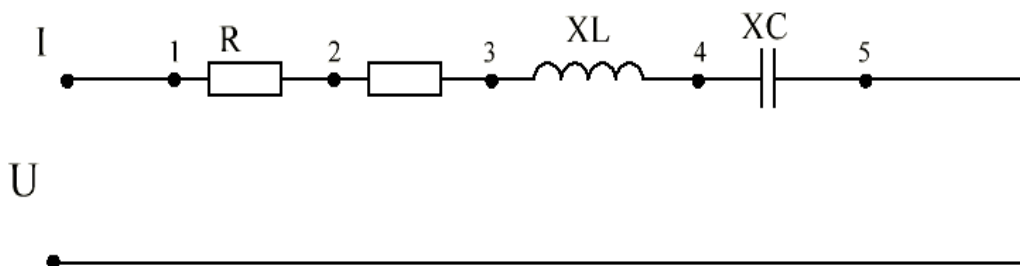


Рисунок 2.39 – Схема с реальными элементами

Дано:

$$U = 311 \sin(\omega t + 60^\circ) (B)$$

$$r = 4 \text{ (Ом)}$$

$$r_k = 4 \text{ (Ом)}$$

$$L_k = 0,07 \text{ (Гн)}$$

$$C = 200 \text{ шкф.}$$

Найти характеристики электрической цепи.

Решение:

$$U = \frac{311}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} B$$

$$\underline{Z} = (r + r_k) + jX_L - j\frac{1}{\omega C} = (r + r_k) + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = 10e^{j37^\circ}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220e^{j60^\circ}}{10e^{j37^\circ}} = 22e^{j23^\circ} (A)$$

$$I = 22 A$$

$$\underline{U}_{12} = I \cdot r = 22e^{j23^\circ} \cdot 4 = 88e^{j23^\circ}$$

$$\underline{U}_{34} = I \cdot jX_L = 22e^{j23^\circ} \cdot \omega L \cdot e^{j90^\circ} = 484e^{j113^\circ}$$

$$\underline{U}_{45} = I \cdot j\frac{1}{\omega C} = 352e^{j(23-90)} = 352e^{-j67^\circ} B$$

$$U_{34} = \sqrt{2} \cdot 484 \sin(\omega t + 113^\circ)$$

$$U_{45} = \sqrt{2} \cdot 352 \sin(\omega t - 67^\circ) = \sqrt{2} \cdot 352 \sin(\omega t + 293^\circ).$$

У проводимости минус для индуктивности и плюс для емкости:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r + jx} = \frac{1(r - jx)}{(r + jx)(r - jx)} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2} = g - jb$$

$$Z_L = jxL$$

$$Y_L = \frac{1}{jxL} = -j \frac{1}{xL} = -jbL$$

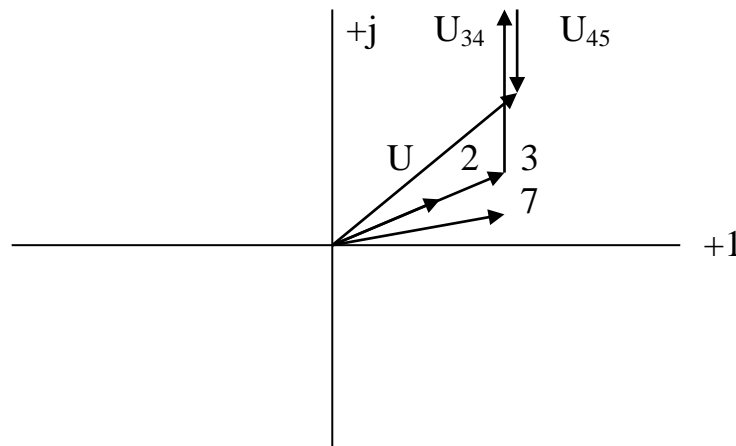


Рисунок 2.40 – Представление электрических величин на комплексной плоскости

2.5 Расчет сложных цепей однофазного синусоидального тока

2.5.1 Законы Киргофа в символической форме

Все методы расчета цепей постоянного тока пригодны для расчета цепей переменного тока в символической форме. При получении отрицательного результата для тока или напряжения необходимо его фазу изменить на 180° .

Методика расчета цепей переменного тока символическим методом.

1. Все исходные данные представлены в комплексной форме (напряжение, ток, все сопротивления все проводимости).

2. На схеме выбирается положение токов в каждой ветви.

3. Пользуясь законами Ома и Киргофа в комплексной форме с учетом положительного направления тока составляют систему уравнений.

4. Решив систему определяют неизвестное, чаще всего ток.

Рассмотрим пример расчёта:

Дано:

$$U=100 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ); r_1=x_c=5 \text{ (Ом)}; r_3=x_l=10 \text{ (Ом)}.$$

Найти: I ?, U ?, Векторная диаграмма.

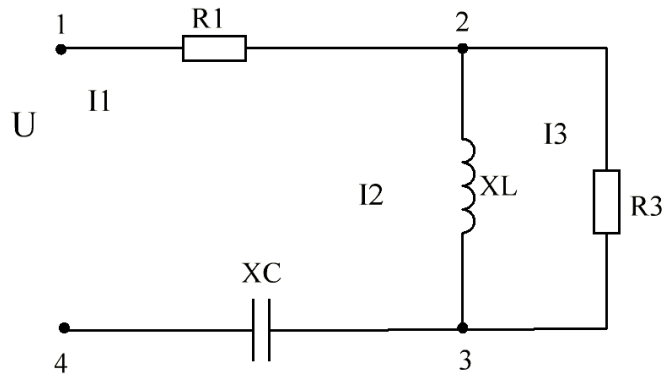


Рисунок 2.41 – Схема сложной цепи

Решение:

$$U=100 e^{j30^\circ}$$

$$\underline{Z}=r_1+$$

$$\frac{r_3 \cdot j \cdot x_l}{r_3 + jx_l} - jx_c = 5 + \frac{j10 \cdot 10}{10 + j10} - j5 = 5 + \frac{100e^{j90^\circ}}{10\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}} - j5 = 5 + 5 + j5 - j5 = 10 \text{ Ом}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}} = \frac{100e^{j30^\circ}}{10} = 10e^{j30^\circ}; U_{23} = \underline{I}_1 \cdot z_{23} = 10e^{j30^\circ} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = \sqrt{2} \cdot 50e^{j75^\circ}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{U_{23}}{jxL} = \frac{\sqrt{2} \cdot 50e^{j75^\circ}}{j10} = 5\sqrt{2}e^{-j75^\circ}; \underline{I}_3 = \frac{U_{23}}{r_3} = \sqrt{2} \cdot 5e^{j75^\circ}$$

$$U_{12} = 50e^{j30^\circ}; U_{34} = 500e^{-60^\circ}$$

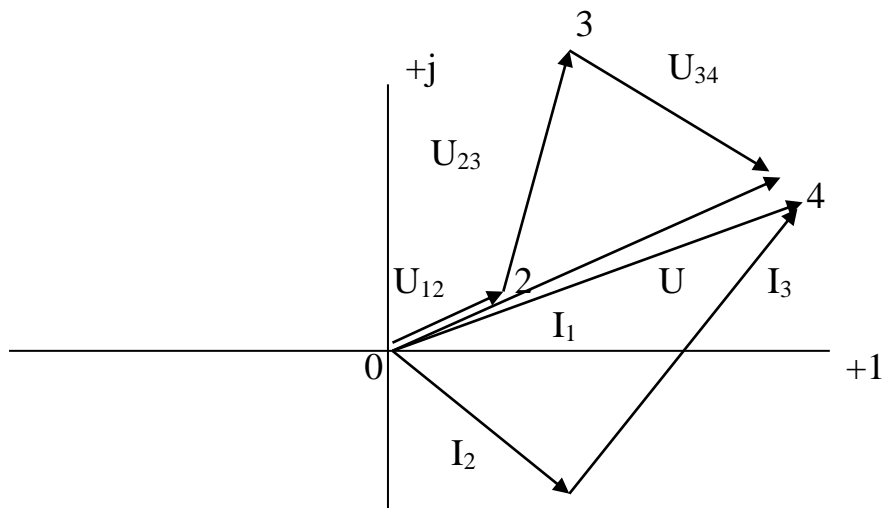


Рисунок 2.42 – Представление электрических величин на комплексной плоскости

2.5.2 Комплексная мощность в цепи синусоидального тока

Для определения комплекса мощности необходимо комплекс напряжения на сопряженный комплекс тока.

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U e^{j\psi u} \cdot I e^{-j\psi i} = U \cdot I \cdot e^{j(\psi u - \psi i)} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi$$

$$S = p + jQ$$

$$\operatorname{Re} [\underline{U} \cdot \underline{I}^*] = \bar{Z} I^2 z$$

$$\operatorname{Im} [\underline{U} \cdot \underline{I}^*] = \bar{Z} I^2 X$$

$$\underline{U} = U e^{j\psi u}$$

$$\underline{I} = I e^{j\psi i}$$

$$\underline{I}^* = I e^{-j\psi i}$$

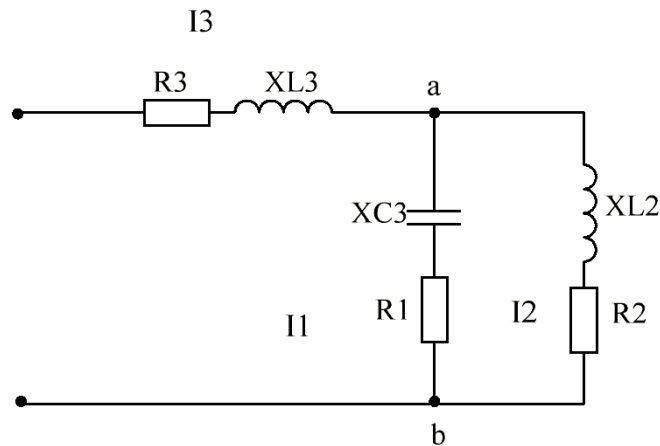


Рисунок 2.43 – Схема сложной цепи

$$I_3 = \frac{U}{Z_{\text{общ}}}$$

$$Z_{\text{общ}} = r_3 + jxL_3 + \frac{(r_1 - jx_{c1})(r_2 + jxl_2)}{r_1 - jxc_1 + r_2 + jxl_2}$$

$$S = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \quad (\underline{A} = A e^{j\varphi} \Rightarrow \underline{A}^* = A e^{-j\varphi})$$

$$P = UI \cos \varphi \quad S = \underline{U} \cdot \underline{I}_3^* = P \pm jQ; Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

2.6 Передача энергии синусоидального однофазного тока и магнитно-связанные цепи

2.6.1 Передача энергии переменного тока по двухпроводной линии. Потеря и падение напряжения линии

Схематически линия электропередачи (рис.2.44) выглядит следующим образом:

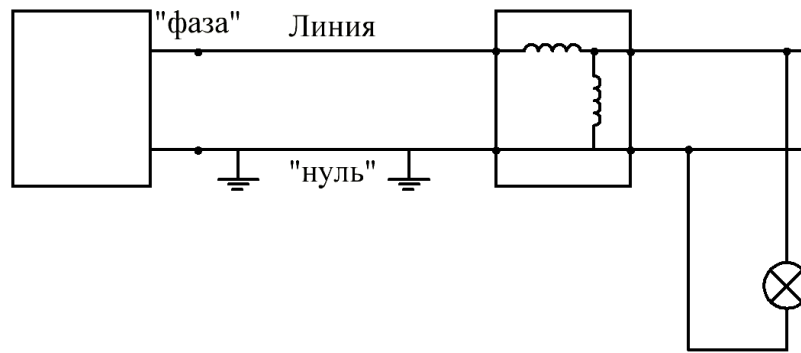


Рисунок 2.44 – Схема линии электропередач

Реальная линия передачи энергии имеет сопротивление индуктивного характера.

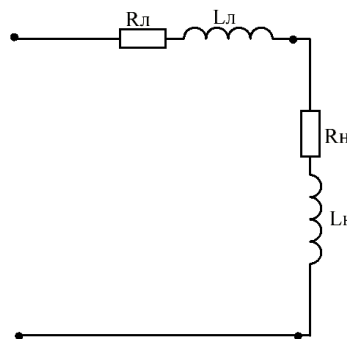


Рисунок 2.45 – Электрическая схема линии электропередач

$$I_n = \frac{\underline{U}}{r_l + r_n + jx_l + jx_n}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_l + \underline{U}_n$$

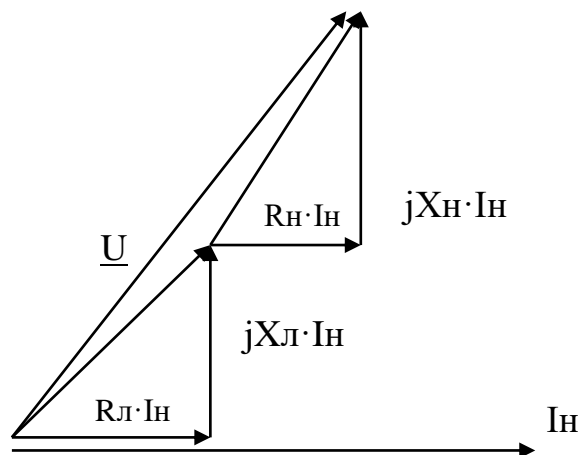


Рисунок 2.46 – Векторная диаграмма линии электропередач

Напряжение потерь определяется как разность действующих напряжений на входе и выходе линии.

$$\Delta U_l = |\underline{U}| - |\underline{U}_H|$$

$$\underline{U}_l = \underline{U} - \underline{U}_H$$

Максимум нагрузки:

$$P_{\max} = I^2 (r_l + r_H) = \frac{U^2}{4r_l} = P_{\max}$$

2.6.2 Индуктивно (магнитно) связанные катушки и их последовательное или параллельное соединение

Передача энергии между индуктивно связанными элементами трансформатора.

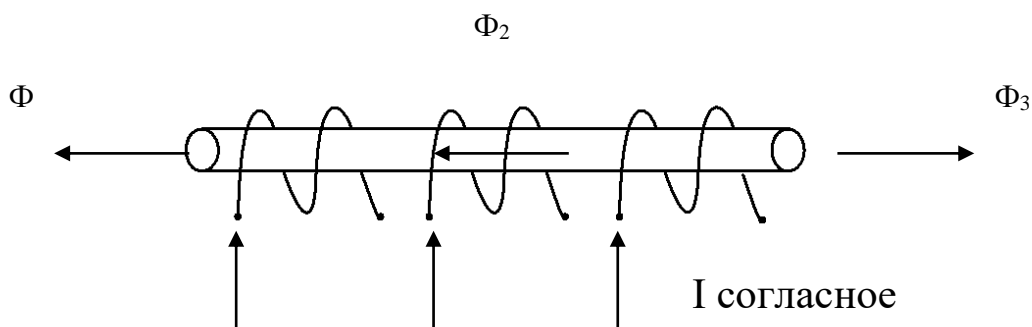


Рисунок 2.47 – Согласное включение катушек

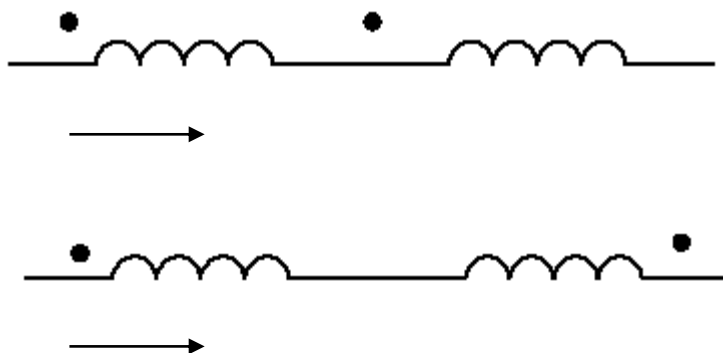


Рисунок 2.48 – Согласное и встречное включение катушек

Если ток входит в условное начало катушек (рис.2.48), то соединение называется согласным, а если входит в начало одной и конец другой – встречным. При согласном включении катушек общий магнитный поток суммируется, при встречном – вычитается.

Степень магнитной связи между катушками называется коэффициентом магнитной связи или коэффициентом взаимоиנדукции.

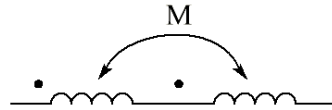


Рисунок 2.49 – Магнитная связь

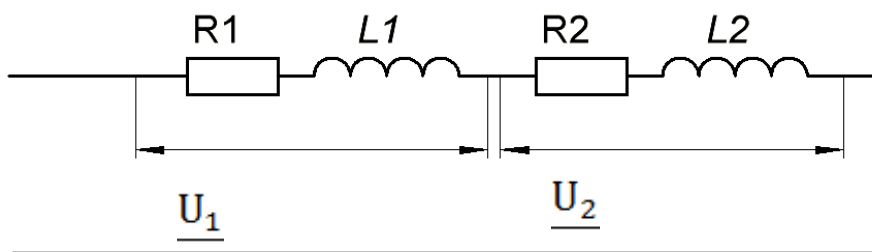


Рисунок 2.50 – Последовательное соединение магнито-связанных катушек

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I} \cdot R_1 + j\omega L_1 \underline{I} + j\omega M \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I} \underline{Z}M$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot R_2 + j\omega L_2 \underline{I} + j\omega M \underline{I} = \underline{I} z_2 + \underline{I} zM$$

$$\underline{U} = \underline{I}(\underline{z}_1 + \underline{z}_2) + \underline{I} 2 \underline{Z}M$$

$$\underline{Z}_{\text{общ.}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2 \underline{Z}M$$

Для встречного уравнение будет $\underline{Z}_{\text{общ.}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2 \underline{Z}M$

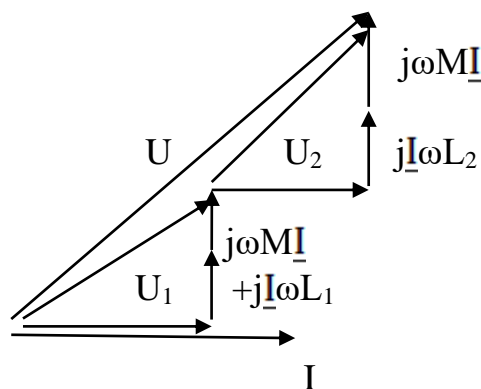


Рисунок 2.51 – Векторная диаграмма последовательно включенных катушек

б) Параллельное включение катушек

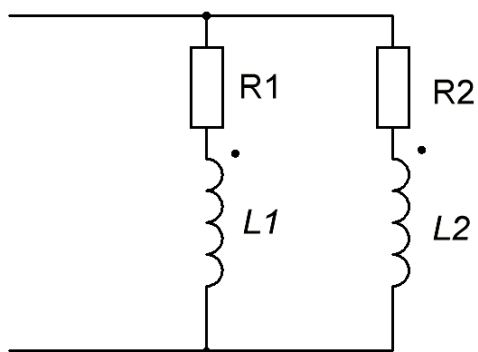


Рисунок 2.52 – Параллельное соединение магнито-связанных катушек

$$\underline{U} = \underline{I}_1 \cdot R_1 + j\underline{I}_1 \cdot x_1 + j\omega M \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = I_2 \cdot R_2 + jI \cdot x_2 + j\omega M I_1$$

$$R_1 + jx_1 = z_1; R_2 + jx_2 = z_2$$

$$\underline{I}_1 = I_1 + \underline{I}_2$$

Определяем ток:

$$\underline{I}_1 = \frac{z_2 - z_m}{z_1 z_2 - z_m^2} U;$$

$$\underline{I}_2 = \frac{z_1 - z_m}{z_1 z_2 - z_m^2} U$$

$$I_{\text{общ.}} = \frac{z_1 + z_2 - 2Z_m}{z_1 z_2 - Z_m^2}$$

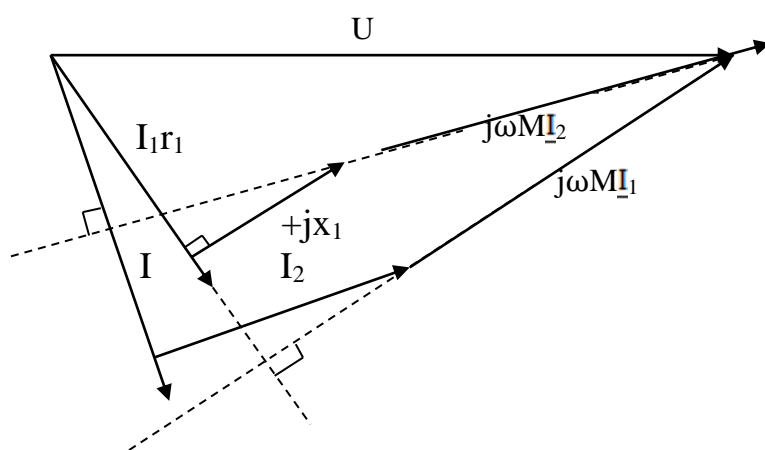


Рисунок 2.53 – Векторная диаграмма параллельно включенных катушек

2.6.3 Передача мощности при помощи трансформатора

Рассмотрим параллельное соединенные катушек.

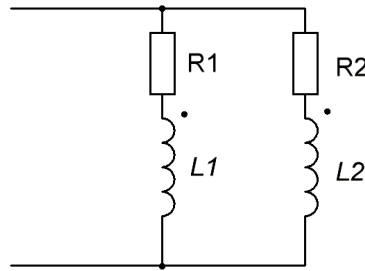


Рисунок 2.54 – Параллельное соединение магнито-связанных катушек

$$P_1 = R_1 \left[\underline{U} \cdot \underline{I}_1^* \right]$$

$$P_2 = R_2 \left[\underline{U} \cdot \underline{I}_2^* \right]$$

$$\underline{U} = \underline{I}_1 \cdot z_1 + \underline{I}_2 Z_M$$

$$\underline{U} = \underline{I}_2 \cdot z_2 + \underline{I}_1 Z_M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = R_e \left[(\underline{I}_1 \cdot z_1 + \underline{I}_2 z_M) \cdot \underline{I}_1^* \right]$$

$$P_2 = R_e \left[(\underline{I}_2 \cdot z_2 + \underline{I}_1 z_M) \cdot \underline{I}_2^* \right] \Rightarrow R_e \left[\underline{I}_1 \underline{I}_1^* z_1 + \underline{I}_2 \underline{I}_1^* z_M \right] = \Delta P_1 + P_{2-1} = I_1^2 R_1 + P_{2-1}$$

Трансформатор меняет амплитуду переменного напряжения.

Рассмотрим работу линейного воздушного трансформатора (рис.2.55):

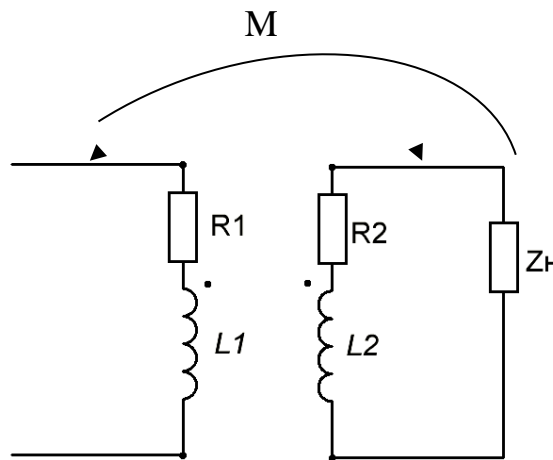


Рисунок 2.55 – Линейный воздушный трансформатор

$$\begin{aligned}\omega L_1 &= x_1 \\ \omega L_2 &= x_2 \\ \underline{Z}_H &= R_H + jx_H \\ R_2 + r_H &= r_{22} \\ x_2 + x_H &= x_{22}\end{aligned}$$

Трансформатор делится на входной контур (входная цепь) и выходной контур (выходная цепь). Входная цепь-первичный контур в который входит первичная обмотка трансформатора. Выходной контур-вторичный контур в который входит вторичная обмотка трансформатора и может входить нагрузка. Первичных и вторичных обмоток может быть несколько.

$$\begin{aligned}I_1 \cdot (R_1 + jX_1) - jI_2 X_M &= \underline{U}_1 \\ I_2 \cdot (R_{22} + jX_{22}) - jI_1 X_M &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= j \frac{I_1 X_M}{R_{22} + jX_{22}} \\ I_1 &= \frac{\underline{U}_1}{(R_1 + R_{\text{вн.}}) + j(x_1 + x_{\text{вн.}})} \\ R_{\text{вн.}} &= \frac{x_M^2}{r_{22}^2 + x_{22}} \cdot R_{22} \\ X_{\text{вн.}} &= \frac{X_M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \cdot X_{22}\end{aligned}$$

Вносимые сопротивления изменяют общие сопротивления первичной цепи трансформатора и зависят эти сопротивления от тока I_2 .

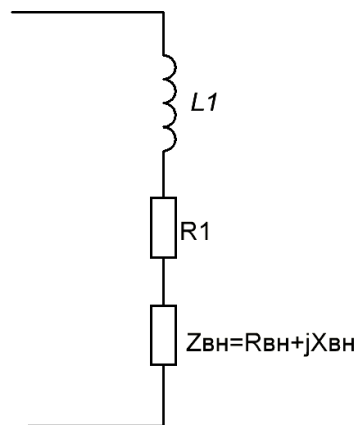


Рисунок 2.56 – Первичная цепь трансформатора

$$\begin{aligned}R_1 &= R_{\text{вн.}} \\ x_1 &= x_{\text{вн.}} = 0\end{aligned}$$

$$\frac{w_1}{w_2} = K_{mp.} - \text{коэффициент трансформации.}$$

$$K_{mp.} = \frac{U_{1xx}}{U_{2xx}} \approx \frac{I_2}{I_1} \quad \text{х.х.- холостой ход}$$

Трансформатор является и трансформатором сопротивления (меняет сопротивление).

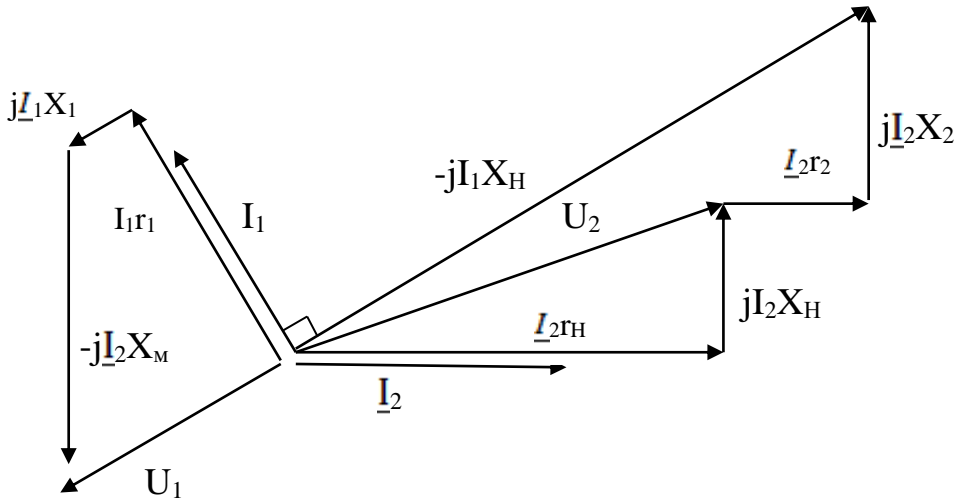


Рисунок 2.57 – Векторная диаграмма для трансформатора

3 ТРЕХФАЗНЫЙ ТОК

3.1 Получение трехфазного тока. Основные определения

Трехфазная цепь является частным случаем многофазных электрических систем, представляющих собой совокупность электрических цепей, в которых действуют ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые по фазе относительно друг друга на определенный угол. Отметим, что обычно эти ЭДС, в первую очередь в силовой энергетике, синусоидальны. Однако, в современных электромеханических системах, где для управления исполнительными двигателями используются преобразователи частоты, система напряжений в общем случае является несинусоидальной. Каждую из частей многофазной системы, характеризующуюся одинаковым током, называют фазой, т.е. фаза – это участок цепи, относящийся к соответствующей обмотке генератора или трансформатора, линии и нагрузке.

Источником трехфазного напряжения является трехфазный генератор, на статоре которого размещена трехфазная обмотка. Фазы этой обмотки располагаются таким образом, чтобы их магнитные оси равномерно были сдвинуты в пространстве друг относительно друга под углом 120° в пространстве (рис.3.1).

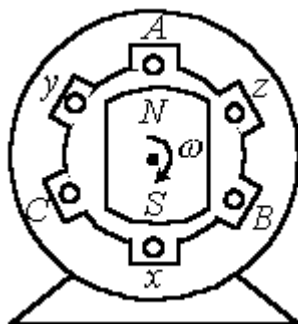


Рисунок 3.1 – Схема генератора трехфазной цепи

Каждая фаза статора условно показана в виде одного витка. Начала обмоток принято обозначать заглавными буквами A, B, C, а концы соответственно прописными x, y, z. ЭДС в неподвижных обмотках статора индуцируются в результате пересечения их витков магнитным полем, создаваемым током обмотки возбуждения вращающегося ротора (на рис. 3.1 ротор условно изображен в виде постоянного магнита, что используется на практике при относительно небольших мощностях). При вращении ротора с равномерной скоростью в обмотках фаз статора индуцируются периодически изменяющиеся синусоидальные ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, но отличающиеся вследствие пространственного сдвига друг от друга по фазе на (рис. 3.2).

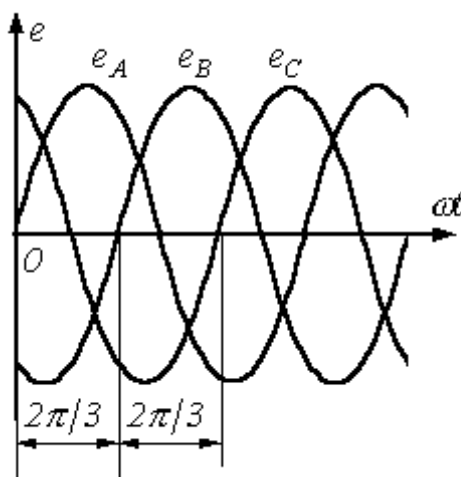


Рисунок 3.2 – Трехфазная ЭДС

Трехфазные системы в настоящее время получили наибольшее распространение. На трехфазном токе работают все крупные электро-

станции и потребители, что связано с рядом преимуществ трехфазных цепей перед однофазными, важнейшими из которых являются:

- экономичность передачи электроэнергии на большие расстояния;
- самым надежным и экономичным, удовлетворяющим требованиям промышленного электропривода является асинхронный двигатель с короткозамкнутым ротором;

- возможность получения с помощью неподвижных обмоток вращающегося магнитного поля, на чем основана работа синхронного и асинхронного двигателей, а также ряда других электротехнических устройств;

- уравновешенность симметричных трехфазных систем.

Различают два вида соединений: в звезду и в треугольник. В свою очередь при соединении в звезду система может быть трех- и четырехпроводной.

Соединение в звезду. На рис. 3.3 приведена трехфазная система при соединении фаз генератора и нагрузки в звезду. Здесь провода AA', BB' и CC' – линейные провода.

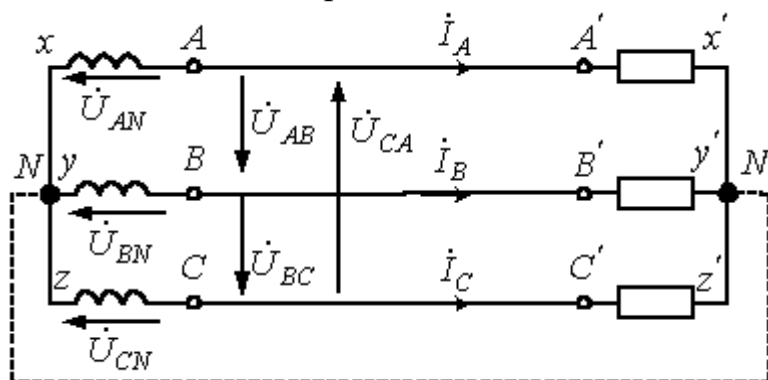


Рисунок 3.3 – Схема звезда-звезда

Линейным называется провод, соединяющий начала фаз обмотки генератора и приемника. Точка, в которой концы фаз соединяются в общий узел, называется нейтральной.

Провод, соединяющий нейтральные точки генератора и приемника, называется нейтральным (на рис. 3.3 показан пунктиром). Трехфазная система при соединении в звезду без нейтрального провода называется трехпроводной, с нейтральным проводом – четырехпроводной.

Все величины, относящиеся к фазам, носят название фазных переменных, к линии – линейных. Как видно из схемы на рис. 3.3, при соединении в звезду линейные токи равны соответствующим фазным токам. При наличии нейтрального провода ток в нейтральном проводе

$\dot{I}_{N'N} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$. Если система фазных токов симметрична, то $\dot{I}_{N'N} = 0$. Следовательно, если бы симметрия токов была гарантирована, то нейтральный провод был бы не нужен. Как будет показано далее,

нейтральный провод обеспечивает поддержание симметрии напряжений на нагрузке при несимметрии самой нагрузки.

Поскольку напряжение на источнике противоположно направлению его ЭДС, фазные напряжения генератора (см. рис. 3.3) действуют от точек А, В и С к нейтральной точке N; $\dot{U}_{A'N'}$, $\dot{U}_{B'N'}$, $\dot{U}_{C'N'}$ - фазные напряжения нагрузки.

Линейные напряжения действуют между линейными проводами. В соответствии со вторым законом Кирхгофа для линейных напряжений можно записать

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{BN}; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{BN} - \dot{U}_{CN}; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_{CN} - \dot{U}_{AN}.$$

На рис. 3.4 представлена векторная диаграмма для симметричной системы напряжений.

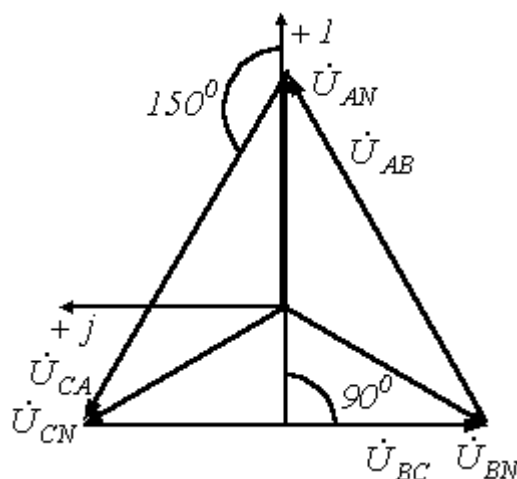


Рисунок 3.4 – Векторная диаграмма

Отметим, что всегда $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0$ - как сумма напряжений по замкнутому контуру.

Как показывает ее анализ (лучи фазных напряжений образуют стороны равнобедренных треугольников с углами при основании, равными 30°). В этом случае

$$U_l = \sqrt{3}U_\phi$$

Обычно при расчетах принимается $\dot{U}_{AN} = U_\phi e^{j0} = U_\phi$. Тогда для случая прямого чередования фаз

$$\dot{U}_{BN} = U_\phi e^{-j120^\circ}, \quad \dot{U}_{CN} = U_\phi e^{-j240^\circ} = U_\phi e^{j120^\circ}.$$

С учетом этого могут быть определены комплексы линейных напряжений

$$\dot{U}_{AN}; \dot{U}_{BC} = \sqrt{3}U_{\phi}e^{-j90^{\circ}}; \dot{U}_{CA} = \sqrt{3}U_{\phi}e^{j150^{\circ}}$$

Соединение в треугольник. В связи с тем, что значительная часть приемников, включаемых в трехфазные цепи, бывает несимметричной, очень важно на практике, например, в схемах с осветительными приборами, обеспечивать независимость режимов работы отдельных фаз. Кроме четырехпроводной, подобными свойствами обладают и трехпроводные цепи при соединении фаз приемника в треугольник. Но в треугольник также можно соединить и фазы генератора (рис. 3.5).

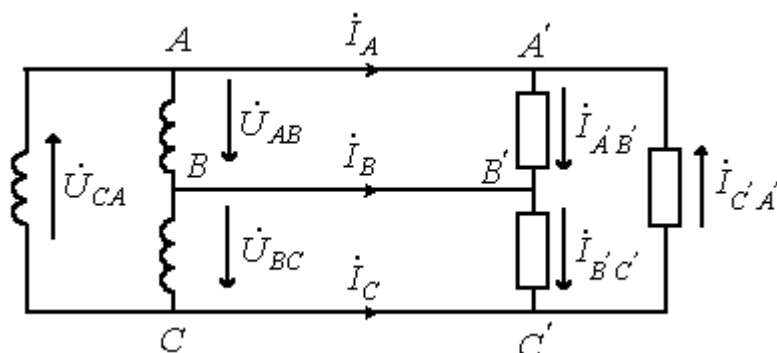


Рисунок 3.5 – Соединение треугольник-треугольник

Для симметричной системы ЭДС имеем

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$$

Таким образом, при отсутствии нагрузки в фазах генератора в схеме на рис. 3.5 токи будут равны нулю. Однако, если поменять местами начало и конец любой из фаз, то в треугольнике будет протекать ток короткого замыкания. Следовательно, для треугольника нужно строго соблюдать порядок соединения фаз – начало одной фазы соединяется с концом другой.

Очевидно, что при соединении в треугольник линейные напряжения равны соответствующим фазным. По первому закону Кирхгофа связь между линейными и фазными токами приемника определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{A'B'} - \dot{I}_{C'A'}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{B'C'} - \dot{I}_{A'B'}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{C'A'} - \dot{I}_{B'C'}. \end{aligned}$$

$$I_n = \sqrt{3}I_{\phi}$$

В заключение отметим, что помимо рассмотренных соединений «звезда - звезда» и «треугольник - треугольник» на практике также применяются схемы «звезда - треугольник» и «треугольник - звезда».

3.2 Расчет трехфазных цепей

3.2.1 Соединение потребителей звездой

Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока, и, следовательно, все рассмотренные ранее методы расчета и анализа в символической форме в полной мере распространяются на них. Анализ трехфазных систем удобно осуществлять с использованием векторных диаграмм, позволяющих достаточно просто определять фазовые сдвиги между переменными. Однако определенная специфика многофазных цепей вносит характерные особенности в их расчет, что, в первую очередь, касается анализа их работы в симметричных режимах.

Многофазный приемник и вообще многофазная цепь называются симметричными, если в них комплексные сопротивления соответствующих фаз одинаковы, т.е. если $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$. В противном случае они являются несимметричными (рис. 3.6). Равенство модулей указанных сопротивлений не является достаточным условием симметрии цепи.

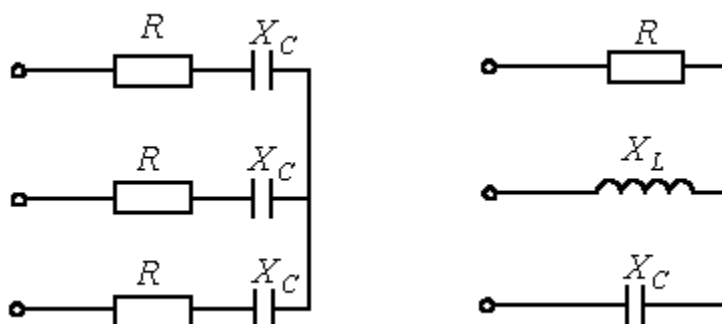


Рисунок 3.6 – Соединение звездой

Если к симметричной трехфазной цепи приложена симметричная трехфазная система напряжений генератора, то в ней будет иметь место симметричная система токов. Такой режим работы трехфазной цепи называется симметричным. В этом режиме токи и напряжения соответствующих фаз равны по модулю и сдвинуты по фазе друг по отношению к другу на угол 120° . Поэтому расчет таких цепей проводится для одной (базовой) фазы, в качестве которой обычно принимают фазу А. При этом, соответствующие величины в других фазах получают формальным добавлением к аргументу переменной фазы А фазового сдвига в 120° при сохранении неизменным ее модуля.

Так для симметричного режима работы цепи при известных линейном напряжении и сопротивлениях фаз можно записать:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{AB} &= \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z} \\ \dot{I}_{AB} &= \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}} = Ie^{j\varphi} \\ \dot{I}_{BC} &= \dot{I}_{AB}e^{-j120^\circ} = Ie^{j(\varphi-120^\circ)}; \\ \dot{I}_{CA} &= \dot{I}_{AB}e^{j120^\circ} = Ie^{j(\varphi+120^\circ)}. \end{aligned}$$

3.2.2 Соединение потребителей треугольником

На рис. 3.7 показана схема соединения симметричного потребителя треугольником и векторная диаграмма цепи.

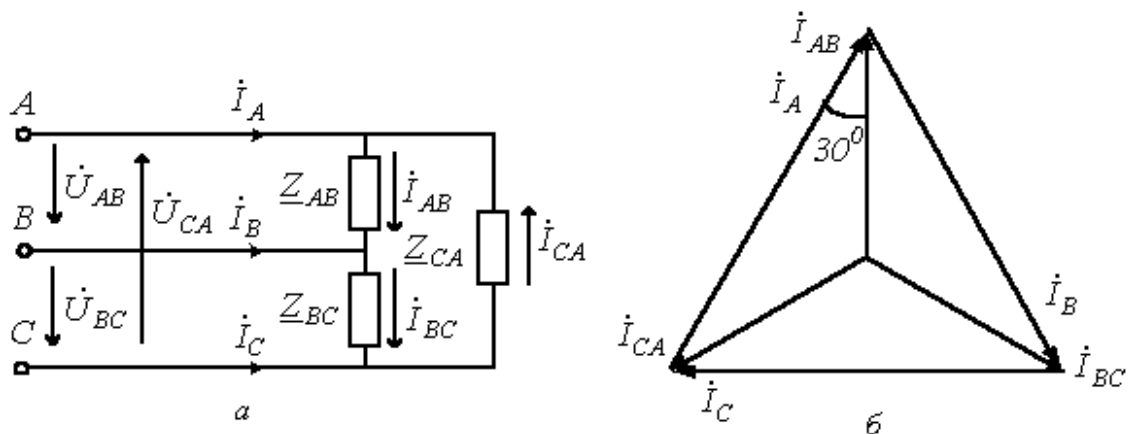


Рисунок 3.7 – Соединение треугольником

Комплексы линейных токов можно найти с использованием векторной диаграммы на рис. 3.7, из которой вытекает:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \sqrt{3}\dot{I}_{AB}e^{-j30^\circ} = \sqrt{3}Ie^{j(\varphi-30^\circ)}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_Ae^{-j120^\circ} = \sqrt{3}Ie^{j(\varphi-150^\circ)}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_Ae^{j120^\circ} = \sqrt{3}Ie^{j(\varphi+90^\circ)}. \end{aligned}$$

При анализе сложных схем, работающих в симметричном режиме, расчет осуществляется с помощью двух основных приемов.

Все треугольники заменяются эквивалентными звездами. Поскольку треугольники симметричны, то в соответствии с формулами преобразования «треугольник-звезда» $Z_{\perp} = Z_{\Delta} / 3$.

Так как все исходные и вновь полученные звезды нагрузки симметричны, то потенциалы их нейтральных точек одинаковы. Следовательно, без изменения режима работы цепи их можно (мысленно) соединить нейтральным проводом. После этого из схемы выделяется базовая фаза (обычно фаза А), для которой и осуществляется расчет, по результатам которого определяются соответствующие величины в других фазах.

Для получения максимальной мощности от трехфазного источника нагрузку необходимо включить треугольником.

3.2.3 Расчет несимметричных режимов работы трехфазных систем

Если хотя бы одно из условий симметрии не выполняется, в трехфазной цепи имеет место несимметричный режим работы. Такие режимы при наличии в цепи только статической нагрузки и пренебрежении падением напряжения в генераторе рассчитываются для всей цепи в целом любым из рассмотренных ранее методов расчета. При этом фазные напряжения генератора заменяются соответствующими источниками ЭДС. Можно отметить, что, поскольку в многофазных цепях, помимо токов, обычно представляют интерес также потенциалы узлов, чаще других для расчета сложных схем применяется метод узловых потенциалов. Для анализа несимметричных режимов работы трехфазных цепей с электрическими машинами в основном применяется метод симметричных составляющих, который будет рассмотрен далее.

При заданных линейных напряжениях наиболее просто рассчитываются трехфазные цепи при соединении в треугольник. Пусть в схеме на рис. 3.7, а $Z_{AB} \neq Z_{BC} \neq Z_{CA}$. Тогда при известных комплексах линейных напряжений в соответствии с законом Ома

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}} \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{BC}} \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}}$$

По найденным фазным токам приемника на основании первого закона Кирхгофа определяются линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$

Обычно на практике известны не комплексы линейных напряжений, а их модули. В этом случае необходимо предварительное определение начальных фаз этих напряжений, что можно осуществить, например, графически. Для этого, приняв $\dot{U}_{AB} = U_{AB}e^{j\theta}$, по заданным модулям напряжений, строим треугольник напряжений (рис.3.8), из которого (путем замера) определяем значения углов α и β .

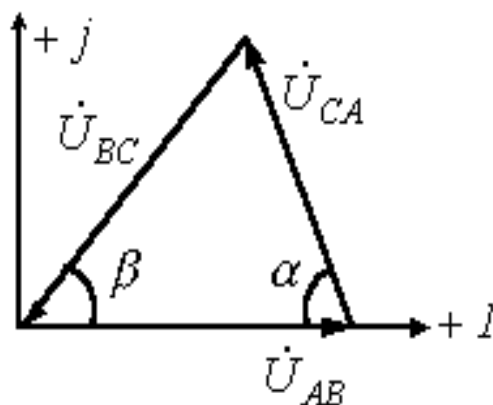


Рисунок 3.8 – Треугольник напряжений

Тогда:

$$\dot{U}_{BC} = U_{BC}e^{-j(\pi-\beta)};$$

$$\dot{U}_{CA} = U_{CA}e^{j(\pi-\alpha)}.$$

Искомые углы α и β могут быть также найдены аналитически на основании теоремы косинусов:

$$U_{BC}^2 = U_{AB}^2 + U_{CA}^2 - 2U_{AB}U_{CA} \cos \alpha;$$

$$U_{CA}^2 = U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - 2U_{AB}U_{BC} \cos \beta.$$

При соединении фаз генератора и нагрузки в звезду и наличии нейтрального провода с нулевым сопротивлением фазные напряжения нагрузки равны соответствующим напряжениям на фазах источника. В этом случае фазные токи легко определяются по закону Ома, т.е. путем деления известных напряжений на фазах потребителя на соответствующие сопротивления. Однако, если сопротивление нейтрального провода велико или он отсутствует, требуется более сложный расчет.

Рассмотрим трехфазную цепь на рис. 3.9.

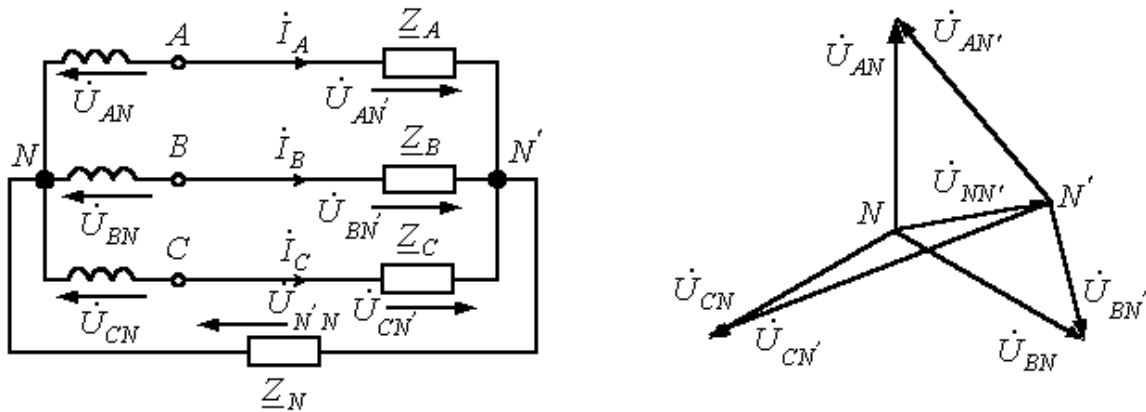


Рисунок 3.9 –Трехфазная несимметричная цепь

При симметричном питании и несимметричной нагрузке ($Z_A \neq Z_B \neq Z_C$), в общем случае, будет соответствовать векторная диаграмма напряжений (см. рис. 3.9), на которой нейтральные точки источника и приемника занимают разные положения, т.е.

Разность потенциалов нейтральных точек генератора и нагрузки называется напряжением смещения нейтральной точки или просто напряжением смещения нейтрали. Чем оно больше, тем сильнее несимметрия фазных напряжений на нагрузке, что наглядно иллюстрирует векторная диаграмма на рис. 3.9.

Для расчета токов в цепи (рис. 3.9) необходимо знать напряжение смещения нейтрали. Если оно известно, то напряжения на фазах нагрузки равны:

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{N'N}; \quad \dot{U}_{BN'} = \dot{U}_{BN} - \dot{U}_{N'N}; \quad \dot{U}_{CN'} = \dot{U}_{CN} - \dot{U}_{N'N}.$$

Тогда для искомых токов можно записать:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{AN'} \underline{Y}_A; \quad \dot{I}_B = \dot{U}_{BN'} \underline{Y}_B; \quad \dot{I}_C = \dot{U}_{CN'} \underline{Y}_C.$$

Соотношение для напряжения смещения нейтрали, записанное на основании метода узловых потенциалов, имеет вид

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_{AN} \underline{Y}_A + \dot{U}_{BN} \underline{Y}_B + \dot{U}_{CN} \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}.$$

При наличии нейтрального провода с нулевым сопротивлением напряжение смещения нейтрали равно нулю.

3.2.4 Мощность в трехфазных цепях

Мгновенная мощность трехфазного источника энергии равна сумме мгновенных мощностей его фаз:

$$P = P_A + P_B + P_C = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C.$$

Активная мощность генератора, определяемая как среднее за период значение мгновенной мощности, равна

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C.$$

Соответственно активная мощность трехфазного приемника с учетом потерь в сопротивлении нейтрального провода

$$P = P_a + P_b + P_c + P_N,$$

Реактивная

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c + Q_N$$

и полная

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Суммарная активная мощность симметричной трехфазной цепи

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi.$$

Учитывая, что в симметричном режиме для звезды имеют место соотношения

$$U_n = \sqrt{3}U_\phi; \quad I_n = I_\phi,$$

а для треугольника –

$$\dot{U}_n = \dot{U}_\phi; \quad I_n = \sqrt{3}I_\phi,$$

для обоих способов соединения фаз получаем

$$P = \sqrt{3}U_n I_n \cos \varphi,$$

где j - угол сдвига между фазными напряжением и током.

Аналогично

$$Q = \sqrt{3} U_n I_n \sin \varphi;$$

$$S = \sqrt{3} U_n I_n.$$

3.3 Электрические цепи несинусоидального периодического тока

3.3.1 Возникновение несинусоидального периодического тока

На практике ЭДС и токи в большей или меньшей степени являются несинусоидальными. Это связано с тем, что реальные генераторы не обеспечивают, строго говоря, синусоидальной формы кривых напряжения, а с другой стороны, наличие нелинейных элементов в цепи обуславливает искажение формы токов даже при синусоидальных ЭДС источников.

Периодическими несинусоидальными величинами называются переменные, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону. Причины возникновения несинусоидальных напряжений и токов могут быть обусловлены или несинусоидальностью источника питания или (и) наличием в цепи хотя бы одного нелинейного элемента. Кроме того, в основе появления несинусоидальных токов могут лежать элементы с периодически изменяющимися параметрами.

Любую несинусоидальную функцию возможно представить набором постоянной составляющей и множеством синусоидальных составляющих, то есть рядом Фурье.

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots$$

где A_0 – постоянная составляющая;

A_1, A_2, A_3 – амплитуды гармоник.

Для получения нулевого фазового сдвига каждой гармоники применяют следующую запись ряда Фурье:

$$f(x) = A_0 + A_1' \sin x + A_2' \sin 2x + A_3' \sin 3x + \dots + A_1'' \cos x + A_2'' \cos 2x + \dots$$

$$A_k = \sqrt{(A_k')^2 + (A_k'')^2}$$
$$\operatorname{arctg} \varphi = \frac{A_k''}{A_k'}$$

Коэффициенты ряда Фурье рассчитываются по формулам:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx - \text{постоянная составляющая.}$$

$$A'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx - \text{синусная составляющая.}$$

$$A''_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx - \text{косинусная составляющая.}$$

Коэффициенты ряда Фурье для стандартных функций могут быть взяты из справочной литературы или в общем случае рассчитаны по приведенным выше формулам. Однако в случае кривых, обладающих симметрией, задача существенно упрощается, поскольку из их разложения выпадают целые спектры гармоник. Знание свойств таких кривых позволяет существенно сэкономить время и ресурсы при вычислениях.

Для симметричных относительно оси абсцисс функций постоянная составляющая и все четные гармоники равны нулю, то есть $A_0 = 0$; $A_2 = 0$; $A_4 = 0$ и т.д.

$$f(\omega t) = A_1 \sin(x + \psi_1) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots$$

Для симметричных относительно начала координат A_0 и все косинусные составляющие равны нулю.

$$f(\omega t) = A_1' \sin \omega t + A_2' \sin \omega t + \dots$$

Для симметричных относительно начала координат и оси абсцисс

$$f(\omega t) = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin \omega t + \dots$$

Для неизвестной кривой используется графо-аналитический метод разложения, при котором периодическая функция разбивается на отдельные n – интервалы. При этом все интегралы заменяются суммой и получаются следующие значения коэффициентов:

$$\Delta x = \frac{2\pi}{n}$$

$$A_0 = \frac{\sum_{p=1}^n f_p(x)}{n}$$

$$A'_k = \frac{2 \sum_{p=1}^n f_p(x) \sin_p kx}{n}$$

$$A''_k = \frac{2 \sum_{p=1}^n f_p(x) \cos_p kx}{n}$$

Синус и косинус определяются как значения синуса или косинуса в конце каждого интервала.

3.3.2 Расчет цепей несинусоидального периодического тока

Действующие значения напряжений и токов определяются следующим образом:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2 dt} \text{ — для любой формы напряжения.}$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \text{ — для несинусоидального напряжения.}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}$$

Мощность в цепях периодического несинусоидального тока определяется как произведение мгновенных значений напряжения и тока.

Если

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(\kappa \omega t + \alpha_k) \quad i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(\kappa \omega t + \beta_k)$$

то для активной мощности можно записать

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(\kappa \omega t + \alpha_k) \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(\kappa \omega t + \beta_k) \right] dt$$

Как было показано при выводе соотношения для действующего значения несинусоидальной переменной, среднее за период значение произведения синусоидальных функций различной частоты равно нулю. Следовательно,

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{km} I_{km}}{2} \cos(\alpha_k - \beta_k) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$$

где $\varphi_k = \alpha_k - \beta_k$.

Таким образом, активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

Аналогично для реактивной мощности можно записать

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k$$

Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2} \neq \sqrt{P^2 + Q^2},$$

где T – мощность искажений, определяемая произведениями действующих значений разнопорядковых гармонических тока и напряжения.

Для расчета цепей несинусоидального периодического тока используется следующая методика:

- разложение в ряд Фурье несинусоидального напряжения (тока);
- используя метод наложения рассчитывают ток (напряжение) для каждой гармонической составляющей;
- искомые величины определяются как алгебраические суммы соответствующих гармонических составляющих.

Если имеются реактивные элементы, то их сопротивление будет разным для разной гармоники. Возможны резонансы для отдельных гармонических составляющих.

3.4 Трехфазные цепи несинусоидального тока

3.4.1 Особенности трехфазных цепей несинусоидального тока

Напряжения трехфазных источников энергии часто бывают существенно несинусоидальными (строго говоря, они несинусоидальны всегда). При этом напряжения на фазах В и С повторяют несинусоидальную кривую напряжения на фазе А со сдвигом на треть периода T основной гармоники:

$$u_B = f(t - T/3); \quad u_C = f(t + T/3).$$

Пусть для фазы А k -я гармоника напряжения

$$u_{Ax} = U_{xm} \sin(\kappa \omega t + \varphi_k).$$

Тогда для k -х гармонических напряжений фаз В и С соответственно можно записать:

$$u_{Bk} = U_{xm} \sin\left(\kappa \omega t + \varphi_k - \frac{2\pi}{3} \kappa\right);$$
$$u_{Ck} = U_{xm} \sin\left(\kappa \omega t + \varphi_k + \frac{2\pi}{3} \kappa\right).$$

Рассмотрим особенности работы трехфазных систем, обусловленные наличием гармоник, кратных трем.

Если фазы генератора соединены в треугольник, то при несинусоидальных фазных ЭДС сумма ЭДС, действующих в контуре, не равна нулю, а определяется гармониками, кратными трем. Эти гармоники вызывают в замкнутом треугольнике генератора ток, даже когда его внешняя цепь разомкнута:

$$I_{\Delta} = \sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots}$$

Если фазы генератора соединить в открытый треугольник, то на зажимах будет иметь место напряжение, определяемое суммой ЭДС гармоник, кратных трем:

$$u_{12} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} E_{3k} \sin(3k \omega t + \varphi_{3k})$$

Таким образом

$$U_{\nabla} = 3 \sqrt{E_3^2 + E_6^2 + E_9^2 + \dots}$$

Независимо от способа соединения – в звезду или в треугольник – линейные напряжения не содержат гармоник, кратных трем.

При соединении в звезду это объясняется тем, что гармоники, кратные трем, как указывалось, образуют нулевую последовательность, ввиду чего исчезают из линейных напряжений, равных разности фазных.

При соединении в треугольник составляющие фазных ЭДС, кратные трем, не выявляются в линейных (фазных) напряжениях, так как компенсируются падениями напряжений на собственных сопротивлениях фаз генератора.

Таким образом, при соединении в треугольник напряжение генератора

$$U_{\Phi} = U_{\Delta} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_4^2 + E_5^2 + E_7^2 + \dots}$$

и ток

$$I_{\Delta} = \sqrt{3(I_1^2 + I_2^2 + I_4^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots)} < \sqrt{3} I_{\Phi} = \sqrt{3(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots)}$$

В свою очередь при соединении в звезду

$$U_{\Delta} = \sqrt{3(U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots)} < \sqrt{3} U_{\Phi} = \sqrt{3(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots)}$$

При симметричной нагрузке ток в нейтральном проводе определяется гармоническими, кратными трем, поскольку они образуют нулевую последовательность:

$$I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots}$$

При соединении в звезду и отсутствии нейтрального провода фазные токи нагрузки не содержат гармоник, кратных трем (в соответствии с первым законом Кирхгофа сумма токов равна нулю, что невозможно при наличии этих гармоник). Соответственно нет этих гармоник и в фазных напряжениях нагрузки, связанных с токами законом Ома. Таким образом, при наличии гармоник, кратных трем, в фазных напряжениях генератора напряжение смещения нейтрали в симметричном режиме определяется этими гармониками

$$U_{N'N} = \sqrt{U_3^2 + U_6^2 + U_9^2 + \dots}$$

Если умножить два гармонических сигнала, то получим амплитудно-модулированные колебания, которые являются несинусоидальной функцией, а, следовательно, содержат гармонические составляющие (рис. 3.10).

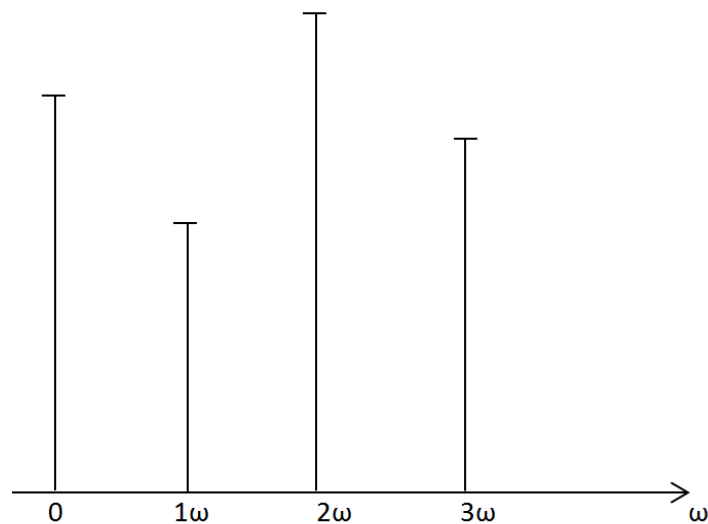


Рисунок 3.10 – Амплитудно-модулированные колебания

4 Переходные процессы в линейных электрических цепях

4.1 Возникновение переходных процессов и методика их расчета классическим методом

Переходной процесс возникает при переходе электрической цепи из одного состояния в другое.

Включение или выключение – это комутация.

Энергия магнитного поля или электрического поля не может изменяться скачкообразно.

$$W_m = L \frac{i^2}{2}$$

$$W_e = c \frac{U^2}{2}$$

$$i_c = c \frac{dU_c}{dt}$$

$$U_L = L \frac{di}{dt}$$

Момент комутации (рис. 4.1) будем называть временем комутации или временем начала переходного процесса.

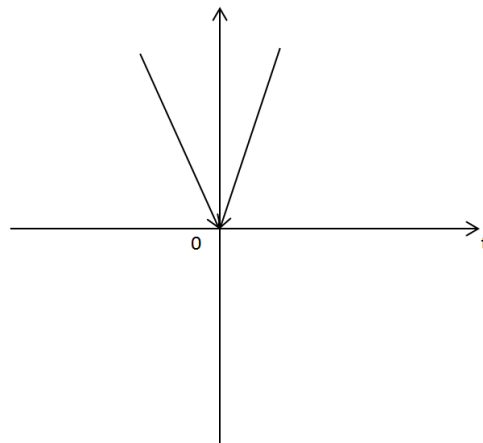


Рисунок 4.1 – Момент комутации

До комутации $t(0_-)$, после комутации $t(0_+)$.

Для анализа переходных процессов вводится два закона комутации.

1. Ток индуктивности до комутации равняется току после комутации (ток через индуктивность не может изменяться скачком).

$$i_L(0_-) = i_L(0_+)$$

2. Напряжение на емкости не может меняться скачкообразно

$$U_C(0_-) = U_C(0_+)$$

Для нахождения напряжений и токов элементов цепи находят либо закон изменения тока через индуктивность, либо закон изменения напряжения на емкости.

Для расчета переходных процессов используется классический метод (наиболее наглядный), операторный метод (упрощает уравнения). Методы основаны на интегралах Фурье и т. д.

В общем случае методика расчета переходных процессов классическим методом включает следующие этапы:

1. Запись выражения для искомой переменной в виде

$$x(t) = x_{np} + x_{св}$$

2. Нахождение принужденной составляющей общего решения на основании расчета установившегося режима после коммутации цепи.

3. Составление характеристического уравнения и определение его корней (для цепей, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка, вместо корней можно находить постоянную времени). Запись выражения свободной составляющей в форме, определяемой типом найденных корней.

4. Подстановка полученных выражений принужденной и свободной составляющих.

5. Определение начальных условий и на их основе – постоянных интегрирования.

4.2 Переходные процессы в R-L цепи при ее подключении к источнику напряжения

Такие процессы имеют место, например, при подключении к источнику питания электромагнитов, трансформаторов, электрических двигателей и т.п.

Рассмотрим подключение цепи к источнику постоянного (U_0) и переменного $u(t)$ напряжения (рис. 4.2).

$$u(t) = U_0; \quad u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_U)$$

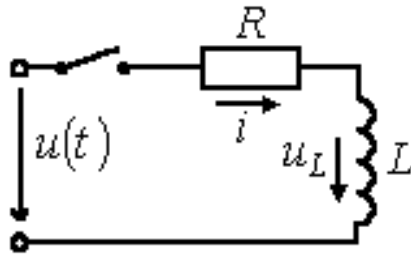


Рисунок 4.2

Согласно рассмотренной методике для тока в цепи на рис. 4.2 можно записать

$$i = i_{np} + i_{ce}$$

Тогда для постоянного входного напряжения принужденная составляющая тока

$$i_{np} = \frac{U_0}{R}$$

Характеристическое уравнение

$$Lp + R = 0,$$

откуда $p = -R/L$ и постоянная времени

$$\tau_L = |1/p| = L/R.$$

Таким образом,

$$i_{ce} = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

Тогда

$$i = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau_1}}.$$

В соответствии с первым законом коммутации $i(0)=0$. Тогда

$$i(0) = \frac{U_0}{R} + A = 0,$$

Откуда $A = -U/R$.

Таким образом, ток в цепи в переходном процессе описывается уравнением

$$i(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}},$$

а напряжение на катушке индуктивности – выражением

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Качественный вид кривых $i(t)$ и $u_L(t)$, соответствующих полученным решениям, представлен на рис. 4.3.

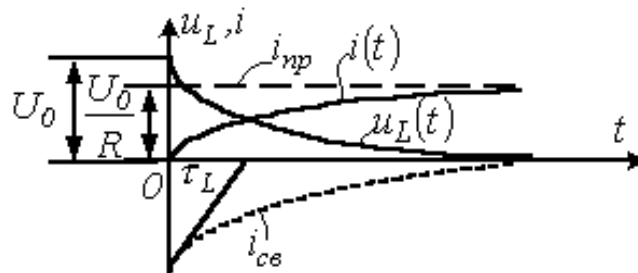


Рисунок 4.3

Для источника переменного напряжения принужденная составляющая рассчитывается с использованием символического метода:

$$\dot{I}_{\text{нпр}} = \frac{\dot{U}_m}{R + j\omega L} = \frac{U_m e^{j\varphi_U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}}} = I_m e^{j(\varphi_U - \varphi)},$$

где $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; $\varphi = \arctg(\omega L/R)$.

Отсюда

$$i_{\text{нпр}} = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi).$$

Выражение свободной составляющей не зависит от типа источника напряжения. Следовательно,

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

В соответствии с первым законом коммутации $i(0)=0$. Тогда

$$0 = I_m \sin(\varphi_U - \varphi) + A$$

Таким образом, окончательно получаем

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi) - I_m \sin(\varphi_U - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Анализ полученного выражения показывает, что при начальной фазе напряжения $\varphi_U = \varphi \pm \pi$ постоянная интегрирования $A=0$. Таким образом, в этом случае коммутация не повлечет за собой переходного процесса и в цепи сразу возникнет установившийся режим.

При $\varphi_U - \varphi = \pm \pi/2$ свободная составляющая максимальна по модулю. В этом случае ток переходного процесса достигает своей наибольшей величины.

Если постоянная времени значительна по величине, то за полпериода свободная составляющая существенно не уменьшается. В этом случае максимальная величина тока переходного процесса может существенно превышать амплитуду тока установившегося режима (рис. 4.4).

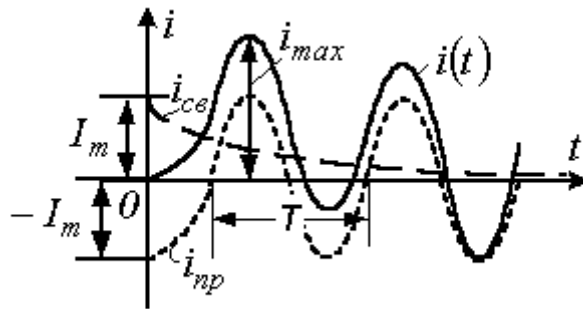


Рисунок 4.4

Максимум тока имеет место примерно через $T/2$. В пределе при $\tau_L \rightarrow \infty$ $i_{max} = 2I_m$.

Таким образом, для линейной цепи максимальное значение тока переходного режима не может превышать удвоенной амплитуды принужденного тока.

Аналогично для линейной цепи с конденсатором. Если в момент коммутации принужденное напряжение равно своему амплитудному значению и постоянная времени цепи достаточно велика, то примерно через половину периода напряжение на конденсаторе достигает своего максимального значения, которое не может превышать удвоенной амплитуды принужденного напряжения.

4.3 Переходные процессы при отключении катушки

При размыкании ключа в цепи на рис. 4.5 принужденная составляющая тока через катушку индуктивности равна нулю.

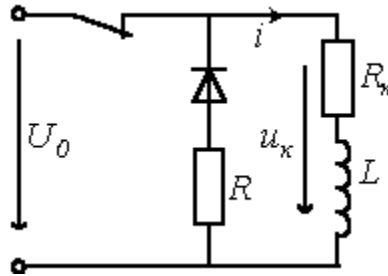


Рисунок 4.5

Характеристическое уравнение

$$Lp + R + R_k = 0,$$

Откуда

$$p = -(R + R_k)/L \quad \text{и} \quad \tau_L = L/(R + R_k).$$

В соответствии с первым законом коммутации

$$i(0) = \frac{U_0}{R_k} = A.$$

Таким образом, выражение для тока в переходном режиме

$$i(t) = \frac{U_0}{R_k} e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

и напряжение на катушке индуктивности

$$u_k(t) = -Ri = -\frac{R}{R_k} U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Анализ показывает, что при размыкании цепей, содержащих индуктивные элементы, могут возникать большие перенапряжения, которые без принятия специальных мер могут вывести аппаратуру из строя. При отсутствии гасящего резистора R указанное напряжение прикладывается к размыкающимся контактам ключа, в результате чего между ними возникает электрическая дуга.

4.4 Заряд и разряд конденсатора

Схема цепи показана на рис. 4.6.

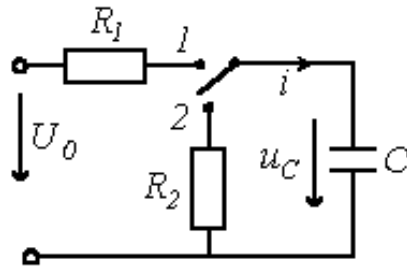


Рисунок 4.6 – Схема для перезаряда конденсатора

При переводе ключа в положение 1 (см. рис. 4.6) начинается процесс заряда конденсатора:

$$u_C(t) = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}}.$$

Принужденная составляющая напряжения на конденсаторе $u_{C\text{пр}} = U_0$.

Из характеристического уравнения

$$R_1 + \frac{1}{Cp} = 0$$

определяется корень $p = -1/(R_1 C)$. Отсюда постоянная времени $\tau_{C1} = R_1 C$.

Таким образом,

$$u_C = U_0 + A e^{-\frac{t}{\tau_{C1}}}.$$

При $t=0$ напряжение на конденсаторе равно $u_C(0)$ (в общем случае к моменту коммутации конденсатор может быть заряженным). Тогда

$$A = u_C(0) - U_0 \quad u_C(t) = U_0 + (u_C(0) - U_0) e^{-\frac{t}{\tau_{C1}}}.$$

Соответственно для зарядного тока можно записать

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0 - u_C(0)}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_{c1}}}$$

Форма кривых переходного процесса зависит от напряжения на конденсаторе в момент коммутации (рис. 4.7).

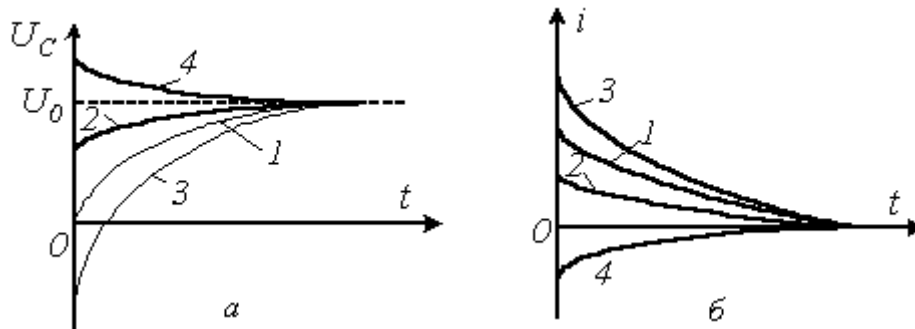


Рисунок 4.7 – Кривые переходного процесса

При разряде конденсатора на резистор (ключ на рис. 4.6 переводится в положение 2) постоянная времени и напряжение будут:

$$\tau_{C2} = R_2 C \quad u_{C\text{нр}} = 0$$

Тогда, принимая, что к моменту коммутации конденсатор был заряжен, можно записать

$$u_C(t) = u_{C1}(0) e^{-\frac{t}{\tau_{C2}}}$$

Соответственно разрядный ток

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_{C1}(0)}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_{C2}}}$$

В заключение отметим, что процессы заряда и разряда конденсатора используются в генераторах пилообразного напряжения, широко применяемых в автоматике. Для этого ключ в схеме на рис. 4.6 заменяется на электронный.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 **Будіщев М С.** Електротехніка, електроніка та мікропроцесорна техніка: навч. посіб. / М. С. Будіщев. – Львів : 2001. – 424 с. – ISBN 000-000-000-0.

2 **Касаткин А.С.** Электротехника : учебник для вузов / А. С. Касаткин, М. В. Немцов. . – М. : Высш. шк, 2002. – 542 с. – ISBN 000-000-000-0.

3 **Нейман Л.Р.** Теоретичні основи електротехніки навч. посіб. / Л. Р. Нейман, К. С. Деригач. – К. : Каравела, 2001. – 536 с. – ISBN 000-000-000-0.

4 **Гусев В. Г.** Электроника и микропроцессорная техника : учебник для вузов / В. Г. Гусев, Ю. М. Гусев. – М. : Высш. шк, 2005. – 790 с. – ISBN 5-06-004271-5.

5 Схемотехніка електронних систем: Кн. 1. Аналогова схемотехніка та імпульсні пристрої: Підручник / В. І. Бойко, А. М. Гурій, В. Я. Жуйкою та ін. – К. : Вища шк., 2004. – 366 с. – ISBN 966-642-192-6-5.

Навчальне видання

ЕЛЕКТРОТЕХНІКА ТА ЕЛЕКТРОМЕХАНІКА

Конспект лекцій

(для студентів всіх форм навчання
спеціальності 151)

(Російською мовою)

Укладач

Степан Павлович Сус

За авторською редакцією